NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Solution de la question du concours d'admission à l'École normale supérieure (1875)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 170-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__170_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1875);

Par M. MORET-BLANC.

Trouver le lieu des pieds des normales menées d'un point donné P *à une série d'ellipses qui ont un sommet commun* B, *la même tangente en ce point, et telles que, pour chacune d'elles, le rapport de l'axe parallèle à la tangente commune au second axe soit égal à une constante donnée* k.

Construire le lieu dans les cas particuliers suivants : on prendra le point P *sur la bissectrice de l'un des angles formés par la tangente et la normale communes* *à toutes les ellipses en* B, *et l'on attribuera à* k *successivement les valeurs* $\sqrt{3}$ *et* 2.

Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale communes, et soient kb et b les demi-axes de la conique ; son équation sera

$$(1) \qquad k^2y^2 + x^2 - 2k^2by = 0,$$

et celle de la normale au point (x, y)

$$\mathrm{Y} - y = \frac{k^2(y - b)}{x}(\mathrm{X} - x);$$

elle doit passer par le point donné (α, β), ce qui donne la condition

$$\beta - y = \frac{k^2(y - b)}{x}(\alpha - x)$$

ou

$$(2) \qquad (k^2 - 1)xy + \beta x - k^2\alpha y = k^2b(x - \alpha).$$

On obtient l'équation du lieu des pieds des normales en éliminant b entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(k^2 - 2)xy^2 + 2\beta xy - k^2\alpha y^2 - x^3 + \alpha x^2 = 0.$$

Le lieu est une courbe du troisième degré ayant un point double à l'origine et pour asymptote la droite

$$x = \frac{k^2\alpha}{k^2 - 2};$$

elle a deux autres asymptotes dont le coefficient angulaire est $\mathrm{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 - 2}}$ et l'ordonnée à l'origine $\frac{2\beta\mathrm{C} - k\alpha\mathrm{C}^2 + \alpha}{2(k^2 - 2)\mathrm{C}}$.

Cas particuliers.

1° $\beta = \alpha$, $h = \sqrt{3}$.

L'équation du lieu devient

$$xy^2 + 2\alpha xy - 3\alpha y^2 - x^3 + \alpha x^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$y - x = 0,$$
$$y^2 + xy - \alpha x - 3\alpha y = 0.$$

Le lieu se compose donc de la droite BP et d'une hyperbole passant par le point B, dont le centre a pour coordonnées

$$x_0 = 3\alpha, \quad y_0 = 5\alpha,$$

et dont les asymptotes sont, l'une parallèle à l'axe des y, et l'autre perpendiculaire à la droite BP.

Connaissant les asymptotes et un point, on pourra sans difficulté déterminer les axes ou construire directement la courbe par points.

2° $\beta = \alpha$, $h = 2$.

L'équation du lieu est

$$2(x - 2\alpha)y^2 + 2\alpha xy - x^3 + \alpha x^2 = 0,$$

d'où

$$y = \frac{-\alpha x \pm x\sqrt{2x^2 - 6\alpha x + 5\alpha^2}}{2x - 4\alpha} = \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right. .$$

L'origine est un point double; les tangentes y ont pour coefficients angulaires

$$\lim \frac{y}{x} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}.$$

La courbe a trois asymptotes, l'une

(1) $$x = 2\alpha,$$

parallèle à l'axe des y, et deux autres dont le coefficient angulaire est donné par l'équation

$$2u^2 - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad u = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

les ordonnées à l'origine sont

$$\frac{4\alpha u^2 - 2\alpha u - \alpha}{4u} = \frac{\sqrt{2} \mp 2}{\pm 4}\alpha,$$

d'où, pour les équations des asymptotes,

$$(2) \qquad y = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\alpha,$$

$$(3) \qquad y = -\frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\alpha.$$

Etudions les variations de l'ordonnée.

Lorsque x varie de zéro à α, y_1 est négatif, décroît jusqu'à un minimum et revient à zéro; x croissant de α à 2α, y_1 croît de zéro à $\frac{3}{2}\alpha$, et x croissant de 2α à l'infini, y_1 croît de $\frac{3}{2}\alpha$ à $+\infty$ en s'approchant de l'asymptote (2); x variant de zéro à $-\infty$, y_1 croît de zéro à $+\infty$ en s'approchant de l'asymptote (3).

On a ainsi une première branche s'étendant à l'infini dans les deux sens du côté des ordonnées positives.

Lorsque x varie de zéro à α, y_2 croît aussi de zéro à α; x croissant de α à 2α, y_2 croît de α à $+\infty$, d'où il passe brusquement à $-\infty$; x croissant de 2α à $+\infty$, y_2 croît de $-\infty$ jusqu'à un maximum, puis décroît de ce maximum jusqu'à $-\infty$ en s'approchant de l'asymptote (3). Lorsque x varie de zéro à $-\infty$, y_2 décroît aussi de zéro à $-\infty$ en s'approchant de l'asymptote (2). On obtient ainsi une seconde branche discontinue ayant trois asymptotes.

Cherchons le point où l'ordonnée est maximum ou minimum.

$$f'_x = 2y^2 + 2\alpha y - 3x^2 + 2\alpha x = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et celle de la courbe, on trouve

$$4x^4 - 28\alpha x^3 + 65\alpha^2 x^2 - 64\alpha^3 x + 20\alpha^4 = 0$$

ou, en posant $\frac{x}{\alpha} = x'$,

$$4x'^4 - 28x'^3 + 65x'^2 - 64x' + 20 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre zéro et 1, et une entre 2 et 4; les deux autres racines sont imaginaires. Les racines réelles sont 0,562 et 3,65, d'où $x = 0,562\,\alpha$, abscisse du point minimum, et $x = 3,65\,\alpha$, abscisse du point maximum.

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y = -0,098\alpha$$

pour le point minimum, et

$$y = -4,560\alpha$$

pour le point maximum.

Note. — La même question a été résolue par MM. Tourettes et Lez.