VICTOR ROUQUET

Note sur les vraies valeurs des expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 113-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__113_1>

NOTE SUR LES VRAIES VALEURS DES EXPRESSIONS DE LA FORME $\frac{\infty}{\infty}$;

PAR M. VICTOR ROUQUET,
Professeur de Mathematiques spéciales au lycée de Marseille.

L'énoncé que l'on donne habituellement est trop général. D'ailleurs il n'est pas difficile, avec un peu d'attention, de reconnaître que la démonstration ordinaire est loin d'être irréprochable. Je me propose dans cette Note de donner un énoncé exact, et une démonstration que je crois rigoureuse, en me bornant au cas élémentaire des fonctions réelles qui ont des dérivées.

LEMME. — *La variable x augmentant indéfiniment, si la dérivée y' d'une fonction y de x tend vers une limite a, le rapport $\frac{y}{x}$ a la même limite a.*

On peut supposer que la variable x augmente indéfiniment par des valeurs positives; car, si cela n'était pas, on remplacerait x par $-x$, auquel cas y' se changerait en $-y'$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que l'on peut trouver une valeur de x telle que, pour toutes les valeurs de x qui lui sont supérieures, le rapport $\frac{y}{x}$ soit compris entre $a-\alpha$, et $a+\alpha$, α étant un nombre positif donné, aussi petit que l'on voudra.

A cet effet, prenons un nombre positif α' moindre que α. Puisque la dérivée y' a pour limite a, quand x augmente indéfiniment, on peut assigner une valeur x_0 telle que, pour les valeurs de x supérieures, y' soit comprise entre $a-\alpha'$ et $a+\alpha'$, c'est-à-dire telle que les inégalités

$$y'-(a-\alpha')>0 \quad \text{et} \quad y'-(a+\alpha')<0$$

soient satisfaites pour $x>x_0$.

Alors les fonctions

$$y-(a-\alpha')x+k \quad \text{et} \quad y-(a+\alpha')x-k,$$

où k désigne une constante positive, et qui ont respectivement pour dérivées $y'-(a-\alpha')$ et $y'-(a+\alpha')$, seront, la première croissante à partir de x_0, et la seconde décroissante à partir de cette valeur; et, comme on peut déterminer la constante k de façon que, pour $x=x_0$, la première soit positive et la seconde négative, la première des deux fonctions sera positive pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0, la seconde étant négative pour les mêmes valeurs, en sorte que les inégalités

$$\frac{y}{x}>a-\alpha'-\frac{k}{x} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x}<a+\alpha'+\frac{k}{x}$$

auront lieu pour $x>x_0$.

Cela posé, assujettissons encore la variable x à la condition

$$\frac{k}{x}<\alpha-\alpha', \quad \text{d'où} \quad x>\frac{k}{\alpha-\alpha'}.$$

Alors, pour les valeurs de x supérieures à la fois à x_0

et à $\frac{k}{\alpha - \alpha'}$, on aura, *a fortiori*,

$$\frac{y}{x} > a - \alpha' - (\alpha - \alpha'), \quad \text{ou} \quad > a - \alpha,$$

et

$$\frac{y}{x} < a + \alpha' + (\alpha - \alpha') \quad \text{ou} \quad < a + \alpha.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.—*Soit* $\frac{y}{z}$ *une fraction dont les deux termes, fonctions d'une même variable* x, *augmentent indéfiniment quand* x *tend vers une valeur finie* x_0, *ou augmente elle-même indéfiniment :*

1° *Si le rapport* $\frac{y'}{z'}$ *des dérivées des deux termes tend vers une limite* a, *on aura*

$$\lim \frac{y}{z} = a.$$

2° *Si le rapport* $\frac{y'}{z'}$ *augmente indéfiniment, il en sera de même du rapport* $\frac{y}{z}$.

y et z étant des fonctions d'une même variable x, on peut regarder y comme une fonction de z, dont la dérivée par rapport à z soit $y'_z = \frac{y'}{z'}$.

D'après le lemme, z augmentant indéfiniment, si $y'_z = \frac{y'}{z'}$ tend vers une limite a, on a

$$\lim \frac{y}{z} = a.$$

Si $\frac{y'}{z'}$ augmente indéfiniment, le rapport inverse $\frac{z'}{y'}$

tend vers zéro, et alors, d'après le cas précédent, $\lim \frac{z}{y} = 0$, ce qui démontre que le rapport inverse $\frac{y}{z}$ augmente indéfiniment.

Remarques. — Pour chercher la vraie valeur d'une fraction dont les deux termes sont fonctions d'une même variable et deviennent infinis pour une même valeur de cette variable, on peut donc substituer au rapport en question celui des dérivées des deux termes ; de même, à ce dernier, celui des dérivées secondes, et ainsi de suite ; dans ce sens que si l'on trouve pour l'un de ces rapports une valeur déterminée finie ou infinie, ce résultat s'applique aux rapports précédents.

Mais la réciproque peut ne pas être vraie. La fraction $\frac{x + \cos x}{x + \sin x}$, où l'on fait augmenter x indéfiniment, en offre un exemple bien connu.