Note sur la résolution en nombres entiers et positifs du système des deux équations indéterminées $x = 4y^2 + 1$, $x^2 = z^2 + (z+1)^2$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 521-523

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__521_0>

NOTE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS DU SYSTÈME DES DEUX ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

$$x = 4y^2 + 1, \quad x^2 = z^2 + (z+1)^2;$$

1. La question posée par M. Catalan (p. 518, 2°) conduit à ces équations; car, en nommant $2x$ un nombre remplissant les conditions énoncées, et y, z d'autres nombres entiers, on aura

$$2x = (2y-1)^2 + (2y+1)^2 = 8y^2 + 2;$$

$$x = 4y^2 + 1. \tag{1}$$

$$4x^2 = (2z)^2 + (2z+2)^2 = 8z^2 + 8z + 4;$$

$$x^2 = z^2 + (z+1)^2. \tag{2}$$

2. L'équation

$$x^2 = z^2 + (z+1)^2 \tag{2}$$

donne, en supposant z impair,

$$x = \alpha^2 + \beta^2, \quad z = \alpha^2 - \beta^2, \quad z+1 = 2\alpha\beta,$$

où α et β désignent des nombres entiers, premiers entre eux, et liés par la relation

$$\beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 = 1, \tag{3}$$

qui exige que α soit pair et β impair.

D'autre part, chacune des deux expressions $\alpha^2 + \beta^2$ et $4y^2 + 1$ représentant la valeur de x, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4y^2 + 1, \tag{4}$$

et en retranchant, membre à membre, l'équation (3) de l'équation (4), il vient

$$2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 4y^2; \quad \alpha(\alpha - \beta) = 2y^2.$$

Mais α et $\alpha - \beta$ sont premiers entre eux; de plus, α est pair et $\alpha - \beta$ impair; donc $\alpha = 2p^2$, $\alpha - \beta = q^2$,

$\beta = 2p^2 - q^2$, où p et q sont des nombres entiers.

Au moyen de la substitution de $2p^2$ et $2p^2 - q^2$ à α et β, l'équation (3) devient

$$(2p^2 - q^2)^2 + 4p^2(2p^2 - q^2) - 4p^4 = 1,$$

ou

$$q^4 - 8p^2q^2 + 8p^4 = 1; \quad q^2 = 4p^2 \pm \sqrt{8p^4 + 1}.$$

Pour que q^2 soit rationnel, il faut que $8p^4 + 1$ soit le carré d'un nombre impair $2r + 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$8p^4 + 1 = 4r^2 + 4r + 1; \quad 8p^4 = 4r^2 + 4r; \quad p^4 = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Or, *aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré* (*) : donc $r = 1$, $p^2 = 1$; il s'ensuit

$$q^2 = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad z = 3, \quad y = 1, \quad x = 5;$$

d'où

$$2x = 10.$$

3. Si z était pair, on aurait

$$x = \alpha^2 + \beta^2, \quad z + 1 = \alpha^2 - \beta^2, \quad z = 2\alpha\beta, \quad \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta = 1,$$

α, β premiers entre eux, β pair et α impair.

Et, à cause de $\alpha^2 + \beta^2 = 4y^2 + 1$,

$$2\beta^2 + 2\alpha\beta = 4y^2, \quad \beta(\beta + \alpha) = 2y^2.$$

Par suite,

$$\beta = 2p^2, \quad \beta + \alpha = q^2, \quad \alpha = q^2 - 2p^2;$$

$$(q^2 - 2p^2)^2 - 4p^4 - 4p^2(q^2 - 2p^2) = 1,$$

ou

$$q^4 - 8p^2q^2 + 8p^4 = 1, \quad q^2 = 4p^2 \pm \sqrt{8p^4 + 1},$$

et, comme précédemment,

$$p^2 = 1, \quad q^2 = 1.$$

De là,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad z = -4, \quad y^2 = 1, \quad x = 5.$$

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, éd. de 1830, t. II, p. 7.

Ainsi, on a encore $2x = 10$; il en faut conclure que 10 est le seul nombre qui jouisse de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs, et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres pairs consécutifs. G.