DESBOVES

Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 398-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__398_0>

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $aX^m + bY^m = cZ^n$;

PAR M. DESBOVES.

[SUITE (*).]

III. — RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $aX^3 + bY^3 = cZ^n$, n ÉTANT ÉGAL A 2, 3 OU 4, ETC.

8. *Résolution de l'équation*

$$aX^3 + bY^3 = Z^2. \tag{35}$$

On a supposé ici que c était égal à 1, car, s'il en était autrement, on multiplierait les deux membres de l'équation par c et l'on poserait

$$cZ = Z_1.$$

Maintenant, si l'on fait U égal à zéro, l'identité (16) devient

$$X^3 + rY^3 = Z^2, \tag{36}$$

et la dernière des formules (17) donne

$$z = -\frac{y^2}{2x}.$$

Alors, en substituant cette valeur de z dans les expres-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 265.

sions de X, Y, Z (17) et (15), on a

$$X = \frac{4x(x^3 - ry^3)}{4x^2}, \quad Y = \frac{y(8x^3 + ry^3)}{4x^2},$$

$$Z = \frac{8x^6 + 20rx^3y^3 - r^2y^6}{8x^2};$$

et, en remplaçant dans l'équation (36) X, Y, Z par les expressions précédentes, puis r par $\frac{b}{a}$, on obtient l'identité

$$\begin{aligned} & a[4x(ax^3 - by^3)]^3 + b[y(8ax^3 + by^3)]^3 \\ & = (8a^2x^6 + 20abx^3y^3 - b^2y^6)^2. \end{aligned}$$

Il suit de là que l'équation (35) a une infinité de solutions entières données par les formules

$$\begin{aligned} X &= 4x(ax^3 - by^3), \\ Y &= y(8ax^3 + by^3), \\ Z &= 8a^2x^6 + 20abx^3y^3 - b^2y^6, \end{aligned}$$

dans lesquelles x et y sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

9. ***Recherche des cas où l'on peut résoudre en nombres entiers l'équation***

$$(37) \qquad aX^3 + bY^3 = cZ^3.$$

Si l'on essaye d'imiter la méthode suivie dans le numéro précédent, en faisant $U = 0$ dans la dernière des formules (19), on est conduit à l'équation

$$x^2z + xy^2 + ryz^2 = 0;$$

mais, cette équation étant du second degré par rapport aux trois variables x, y, z, on ne pourra pas trouver ainsi une infinité de solutions de l'équation (37), quels que soient a, b, c. On sait d'ailleurs que l'équation (37) est souvent impossible : nous allons donc chercher un certain nombre de cas où elle peut être résolue en nombres entiers, en partant d'identités que nous allons d'abord établir.

Prenons pour point de départ l'identité évidente

$$(38)\qquad (X+Y)^3+(X-Y)^3=2(X^2+3Y^2)X.$$

En y faisant $X=x^3$, $Y=y$, on a d'abord

$$(39)\qquad (x^3+y)^3+(x^3-y)^3=2(x^6+3y^2)x^3.$$

Faisons maintenant dans l'identité (38) un changement de variables tel, que X^2+3Y^2 devienne un cube. Pour cela donnons à a et b respectivement les valeurs 0 et 3 dans les équations (5), (8) et (9) du n°4 : on a ainsi

$$X=x^3-9y^2x,\quad Y=3x^2y-3y^3,\quad Z=x^2+3y^2,$$
$$X^2+3Y^2=(x^2+3y^2)^3;$$

et, en remplaçant dans l'identité (38) X, Y, Z, X^2+3Y^2 par les expressions précédentes, on a, après le changement de y en $\frac{y}{3}$,

$$(9x^3-9xy^2+9x^2y-y^3)^3+(9x^3-9xy^2-9x^2y+y^3)^3$$
$$=(x-y)(x+y)2x[3(3x^2+y^2)]^3.$$

Comme, dans le produit $(x-y)(x+y)2x$, le troisième facteur est la somme des deux autres, on pose

$$x+y=x_1,\quad x-y=y_1,$$

et, si l'on remplace dans l'identité précédente x et y par $\frac{x_1+y_1}{2}$, $\frac{x_1-y_1}{2}$, on a, en effaçant les accents,

$$(40)\quad \begin{cases}[x^3-y^3+3xy(2x+y)]^3+[y^3-x^3+3xy(2y+x)]^3\\ \qquad =xy(x+y)[3(x^2+xy+y^2)]^3.\end{cases}$$

En changeant, dans cette dernière identité, y en $y^3 - x$, on a celle-ci :

$$(41)\quad \begin{cases} (-x^3 - y^9 + 6xy^6 - 3x^2y^3)^3 + (x^3 + y^9 + 3xy^6 - 6x^2y^3)^3 \\ \quad = x(y^3 - x)\,[3y(x^2 - xy^3 + y^6)]^3. \end{cases}$$

L'identité (40) a déjà été donnée par M. E. Lucas, qui y a été conduit par des considérations géométriques ; on peut encore la démontrer comme il suit.

Si l'on part des équations (18) et (19) du n° 5, en égalant U à zéro, on a

$$r = -\frac{x(xz + y^2)}{yz},$$

et, par suite,

$$X_1 = -\frac{x}{y^2z^2}(y^6 + 3x^2y^2z^2 - x^3z^3 - 6xzy^4),$$

$$Y_1 = -\frac{3x}{yz}(y^4 + x^2z^2 + xzy^2),$$

$$U_1 = \frac{x}{y^2z^2}(x^3z^3 + 3xzy^4 + 6x^2y^2z^2 - y^6).$$

Alors, en substituant, dans l'équation (18), pour X_1, Y_1, U_1, les expressions précédentes, on obtient l'identité

$$\begin{aligned} &[y^6 - x^3z^3 + 3xzy^2(2y^2 + xz)]^3 \\ &\quad + [x^3z^3 - y^6 + 3xzy^2(2xz + y^2)]^3 \\ &\quad = xzy^2(xz + y^2)\,[3(y^4 + x^2z^2 + xzy^2)]^3; \end{aligned}$$

mais, si l'on y fait

$$y^2 = x_1, \quad xz = y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a l'identité (40).

Pour obtenir une nouvelle identité, faisons a et b égaux à 1 dans les équations (5), (8) et (9) ; alors on a

$$X = x^3 - 3xy^2 - y^3,$$

$$Y = 3xy(x + y),$$

$$X^2 + XY + Y^2 = (x^2 + xy + y^2)^3,$$

$$X - Y = x^3 - y^3 - 3xy(2x + y).$$

Si maintenant on multiplie, membre à membre, les deux dernières équations, il vient

$$X^3 - Y^3 = [x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y)](x^2 + xy + y^2)^3,$$

ou

$$(42) \quad \begin{cases} (x^3 - 3xy^2 - y^3)^3 - [3xy(x + y)]^3 \\ \quad = [x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y)](x^2 + xy + y^2)^3. \end{cases}$$

C'est l'identité qu'il s'agissait de trouver

Remarque. — L'identité (42) conduit à une nouvelle démonstration de l'identité (40).

En effet, si l'on permute x, y dans l'identité (42) et que l'on retranche, membre à membre, cette dernière identité de celle qu'on a obtenue, on a

$$\begin{aligned} &(x^3 - y^3 + 3x^2y)^3 + (x^3 - y^3 - 3xy^2)^3 \\ &\quad = (x - y)(x + 2y)(2x + y)(x^2 + xy + y^2)^3. \end{aligned}$$

Or, comme dans le produit $(x - y)(x + 2y)(2x + y)$ le troisième facteur est égal à la somme des deux autres, par un changement de variables dont le choix est évident, on est conduit à l'identité (40).

Je vais maintenant démontrer une identité plus générale que les précédentes, et qui donnera quelques-unes d'entre elles comme cas particuliers.

D'après le théorème I (2) étendu à quatre facteurs dont trois sont égaux, on peut écrire

$$X_1^2 + X_1Y_1 + Y_1^2 = (x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)(x^2 + xy + y^2)^3,$$

ou

$$(43) \quad X_1^3 - Y_1^3 = (X_1 - Y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)(x^2 + xy + y^2)^3.$$

X_1 et Y_1 sont d'ailleurs obtenus en remplaçant, dans les formules (2), d'abord X, Y, x, y, a, b respectivement par X_1, Y_1, X, Y, 1, 1, puis X, Y par les expressions que donnent les formules (8), c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned}
X_1 &= x^3x_1 - 3xy^2x_1 - y^3x_1 - 3x^2yy_1 - 3xy^2y_1,\\
Y_1 &= x^3y_1 - y^3y_1 + 3x^2yy_1 + 3x^2yx_1 + 3xy^2x_1,\\
X_1 - Y_1 &= (x^3 - y^3 - 6xy^2 - 3x^2y)\,x_1\\
&\quad + (y^3 - x^3 - 6x^2y - 3xy^2)\,y_1.
\end{aligned}$$

On voit alors que, a et b étant égaux à 1 dans l'équation (37), on pourra prendre pour c la valeur donnée par la formule

$$(44)\qquad c = (X_1 - Y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2),$$

l'expression de $X_1 - Y_1$ étant obtenue par la dernière équation.

Il est visible d'abord que, si dans l'expression (44) on fait successivement $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, et $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, on trouve pour c les valeurs données par les identités (40) et (42) ; ces identités elles-mêmes sont donc la conséquence de l'identité générale.

Donnons encore à x_1 et y_1 les valeurs x et $-y$; alors on a

$$c = (x^3 + y^3)(x - y)^3,$$

et l'identité générale devient

$$(45)\quad [x(x^3 + 2y^3)]^3 + [-y(y^3 + 2x^3)]^3 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)^3.$$

On peut conclure de tout ce qui précède que, si dans l'équation (37) a et b sont égaux à 1, cette équation pourra être résolue lorsque c aura l'une des formes suivantes :

$$2(x^6 + 3y^2),\quad xy(x^3 + y^3),\quad x(y^3 - x^3),$$
$$x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y),\quad x^3 - y^3.$$

Toutes ces formes, à l'exception de la première, dérivent de la forme générale (44) ; mais elles sont toutes utiles à connaître pour les applications numériques.

Je vais maintenant établir des identités correspondant au cas où a et b ont des valeurs quelconques. Supposons que la fonction Z (15) soit multipliée par la fonction $x_1^3 + ry_1^3 + r^2 z_1^3 - 3rx_1 y_1 z_1$, que nous représentons par Z_1, et, pour plus de simplicité dans les calculs, faisons d'abord $z = 0$ dans les formules (15) et (19); ce qui donne

$$X = x^3 + ry^3, \quad Y = 3x^2 y, \quad U = 3xy^2, \quad Z = x^3 + ry^3.$$

Si l'on suppose maintenant que le second membre de l'identité (18) soit multiplié par Z_1, et que l'on désigne par X′, Y′, U′ les valeurs qui remplacent X_1, Y_1, U_1 dans le premier membre, on aura par le calcul ordinaire, mais en posant, pour plus de simplicité, $y_1 = 1$, $z_1 = 0$,

$$\begin{aligned} X' &= (x^3 + ry^3) x_1 + 3rxy^2, \\ Y' &= x^3 + ry^3 + 3x^2 y x_1, \\ U' &= 3xy(yx_1 + x). \end{aligned}$$

On a aussi

$$Z_1 = x_1^3 + r.$$

En égalant U′ à zéro, on a

$$x_1 = -\frac{x}{y},$$

et, en substituant cette valeur de x_1 dans X′, Y′, Z_1, on a

$$X' = \frac{x(2ry^3 - x^3)}{y}, \quad Y' = \frac{-y(2x^3 - ry^3)}{y}, \quad Z_1 = \frac{ry^3 - x^3}{y^3};$$

d'où, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, on déduit l'identité

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & a[x(ax^3 + 2by^3)]^3 + b[-y(2ax^3 + by^3)]^3 \\ & = (ax^3 + by^3)(ax^3 - by^3)^3. \end{aligned} \right.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème V. — *a et b ayant des valeurs quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation (37) puisse être résolue en nombres entiers, Z étant différent de l'unité.*

On peut trouver pour c une expression qui contienne autant de variables que l'on veut, en multipliant successivement les deux membres de l'équation (18) par des fonctions Z_1, Z_2, Z_3, ... (on désigne, en général, par Z_p la fonction $x_p^3 + ry_p^3 + r^2 z_p^3 - 3rx_p y_p z_p$) et en remplaçant, dans le premier membre, X_1, Y_1, U_1 par les fonctions qui correspondent à la dernière multiplication. On égalerait ensuite à zéro la fonction que remplace U après les multiplications. On pourra d'ailleurs disposer des indéterminées pour trouver autant d'identités que l'on voudra, plus ou moins simples. Si, par exemple, on multiplie par deux facteurs Z_1, Z_2, et que l'on fasse, pour simplifier,

$$z = 0, \quad x_1 = -\frac{x^3 + ry^3}{3x^2y}, \quad y_1 = 1,$$
$$z_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z_2 = 0, \quad y_2 = 1,$$

en effectuant les calculs ordinaires, on tombe sur l'identité

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} & a[3bxy^2(by^3 - 2ax^3)]^3 + b(a^2x^6 + b^2y^6 - 7abx^3y^3)^3 \\ & = b(a^3x^9 + b^3y^9 - 24a^2bx^6y^3 + 3ab^2x^3y^6)(ax^3 + by^3)^3, \end{aligned} \right.$$

qui conduit à une nouvelle forme de c correspondant à des valeurs arbitraires de a et b.

10. *Recherche des formules qui permettent de déduire d'une première solution de l'équation (37) une infinité d'autres solutions.*

Premier cas. — *a et b sont égaux à l'unité.* Supposons que, dans l'identité (45), x et y, au lieu d'être des nombres entiers quelconques, forment avec une troisième variable z une solution de l'équation (37); alors, dans cette identité, on peut remplacer x^3+y^3 par cz^3, et son second membre peut s'écrire $c[z(x^3-y^3)]^3$. Il suit de là que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (37), on aura une seconde solution X, Y, Z par les formules

$$(48)\qquad \begin{cases} X = x(x^3+2y^3), \\ Y = -y(2x^3+y^3), \\ Z = z(x^3+y^3) : \end{cases}$$

ce sont les formules de Prestet et d'Euler.

On voit de même que, si l'on change, dans l'identité (40), x et y en x^3 et y^3, puis que l'on remplace x^3+y^3 par cz^3, à une première solution (x, y, z) de l'équation (37) correspond une seconde solution (X, Y, Z), donnée par les formules

$$(49)\qquad \begin{cases} X = x^9 - y^9 + 3x^3y^3(2x^3+y^3), \\ Y = y^9 - x^9 + 3x^3y^3(2y^3+x^3), \\ Z = 3xyz(x^6+x^3y^3+y^6). \end{cases}$$

Ces dernières formules sont dues à M. Lucas.

Deuxième cas. — *a et b sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.* Remplaçons, dans l'identité (46), ax^3+by^3 par cz^3; on voit alors que, en désignant par (x, y, z), (X, Y, Z) deux solutions de l'équation (37), on a les formules suivantes, telles qu'on les déduit de la méthode de Lagrange (*) :

$$(50)\qquad \begin{cases} X = x(ax^3+2by^3), \\ Y = -y(2ax^3+by^3), \\ Z = z(ax^3-by^3). \end{cases}$$

(*) *Voir* le Mémoire de Lagrange déjà cité en commençant : *De quelques problèmes de l'Analyse de Diophante.*

11. ***Formules qui donnent une troisième solution de l'équation (37) lorsqu'on en connaît deux autres.***

Soient (x, y, z), (x', y', z') les deux premières solutions et (x'', y'', z'') la troisième. En exprimant que (x, y, z), (x', y', z') sont deux solutions de l'équation, on obtient

$$\frac{a}{z^3y'^3 - y^3z'^3} = \frac{b}{x^3z'^3 - z^3x'^3} = \frac{c}{x^3y'^3 - y^3x'^3};$$

a, b, c peuvent donc être considérés comme respectivement égaux aux binômes $z^3y'^3 - y^3z'^3$, $x^3z'^3 - z^3x'^3$, $x^3y'^3 - y^3x'^3$.

Cela posé, ajoutant, membre à membre, les deux identités évidentes

$$(u^2 - v)^3 - (v^2 - u)^3 = (u^3 - v^3)(u^3 + v^3 + 1 - 3uv),$$
$$(uv^2 - u^2)^3 - (vu^2 - v^2)^3 = (u^3 - v^3)(-u^3 - v^3 - u^3v^3 + 3u^2v^2),$$

on a

$$(1 - v^3)(u^2 - v)^3 + (u^3 - 1)(v^2 - u)^3 = (u^3 - v^3)(1 - uv)^3,$$

ou encore, après avoir remplacé u et v respectivement par $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$,

$$\begin{aligned}(y'^3 - y^3)(x^2y' - x'^2y)^3 + (x^3 - x'^3)(y^2x' - xy'^2)^3 \\ = (x^3y'^3 - y^3x'^3)(x'y' - xy)^3 \ (*).\end{aligned}$$

Si maintenant on change, dans l'identité précédente, x, y, x', y' en $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, il vient

$$\begin{aligned}(z^3y'^3 - y^3z'^3)(x^2y'z' - x'^2yz)^3 + (x^3z'^3 - z^3x'^3)(y^2x'z' - y'^2xz)^3 \\ = (x^3y'^3 - y^3x'^3)(z^2x'y' - z'^2xy)^3,\end{aligned}$$

(*) Cette identité montre que l'on peut trouver une infinité de nombres entiers qui soient, de deux manières différentes, la somme de trois cubes entiers.

ou encore, en tenant compte de la remarque faite en commençant,

$$a(x^2y'z' - x'^2yz)^3 + b(y^2x'z' - y'^2xz)^3 = c(z^2x'y' - z'^2xy)^3;$$

on a donc les formules demandées

$$(51)\qquad \begin{cases} x'' = x^2y'z' - x'^2yz, \\ y'' = y^2x'z' - y'^2xz, \\ z'' = z^2x'y' - z'^2xy. \end{cases}$$

Les formules précédentes sont plus simples que celles de Cauchy; mais elles s'en déduisent aisément et donnent, d'ailleurs, la même solution. On voit aussi, à l'aide de ces mêmes formules, que, si l'on avait la relation

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = 0,$$

on retomberait sur la solution (x, y, z): il en est ainsi, par exemple, lorsque (x, y, z), (x', y', z') sont deux solutions consécutives données par les formules de Lagrange.

12. *Résolution en nombres entiers de l'équation*

$$(52)\qquad aX^3 + bY^3 = cV^4.$$

On multiplie les deux membres de l'équation (20) par un facteur Z_1, défini comme au n° 9, et, en posant

$$z = 0, \quad z_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad r = \frac{b}{a},$$

par un calcul tout semblable à celui qui a donné l'identité (46), on obtient

$$(53)\qquad \begin{cases} a[x(4a^2x^6 - 19abx^3y^3 + 4b^2y^6)]^3 \\ \quad + b[y(10a^2x^6 - 16abx^3y^3 + b^2y^6)]^3 \\ = 6\{a^3x^9 - 168a^2bx^6y^3 + 12ab^2x^3y^6 - b^3y^9\}(ax^3 - by^3)^4. \end{cases}$$

Et ainsi se trouve démontré le théorème suivant :

Théorème VI. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on pourra trouver une infinité de valeurs de c, telles que l'équation (52) puisse être résolue en nombres entiers.*

Nous nous arrêtons ici dans la résolution de l'équation $aX^3 + bY^3 = cZ^n$; car on voit assez, par ce qui précède, comment on trouvera, pour toutes les valeurs de n, une identité analogue à l'identité (53).

13. En partant des identités fondamentales qui ont été établies dans la Section II, on peut quelquefois parvenir à des identités qui conduisent à la résolution de nouvelles équations. J'en citerai un seul exemple.

On déduit d'abord aisément des équations (15), (16) et (17) celle-ci :

$$\begin{aligned} Z^2 + 3XYU = {} & (x^3 + ry^3 + r^2z^3 + 6rxyz)^2 \\ & + 6r(y^2 - xz)(x^2 - ryz)(rz^2 - xy); \end{aligned}$$

d'où il suit que, si l'on résout par rapport à x, y ou z l'une des équations

$$y^2 = xz, \quad x^2 = ryz, \quad rz^2 = xy,$$

le second membre de l'identité précédente se réduit à un carré. Si l'on prend, par exemple, z égal à $\frac{y^2}{x}$, ce second membre devient $\frac{(x^6 + 7rx^3y^3 + r^2y^6)^2}{x^6}$, et les valeurs de X, Y, U, Z s'obtiennent en remplaçant dans les formules (15) et (17) z par $\frac{y^2}{x}$. Si alors, comme à l'ordinaire, on change r en $\frac{b}{a}$, on a finalement l'identité

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} & a[x(ax^3 + 2by^3)]^3 + b[y(by^3 + 2ax^3)]^3 + a^2b^2(3x^2y^2)^3 \\ & \quad = (a^2x^6 + 7abx^3y^3 + b^2y^6)^2, \end{aligned} \right.$$

à laquelle M. Lucas est aussi parvenu, mais autrement. L'identité (54) donne évidemment le moyen d'obtenir une infinité de solutions de l'équation

$$aX^3 + bY^3 + a^2b^2U^3 = Z^2.$$

(*A suivre.*)