NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESBOVES

Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 433-444

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__433_0>

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n;$$

Par M. DESBOVES.

[SUITE (*).]

IV. — Résolution de l'équation $aX^4 + bY^4 = cZ^n$, n ayant les valeurs 2, 3, 4, etc.

14. *Identités relatives à la résolution de l'équation*

$$aX^4 + bY^4 = cZ^2. \tag{55}$$

En égalant à zéro les valeurs de U et V données par les formules (27) et en résolvant les deux équations ainsi obtenues par rapport à x et r, on a

$$x = \frac{-yz}{u}, \quad r = \frac{y(2z^2 - yu)}{u^3}.$$

Si l'on substitue ensuite les valeurs précédentes de x et r dans les expressions de X et Y (27), et dans celle de Z (25), on a

$$X = \frac{2y(z^4 - y^2u^2 + 2yuz^2)}{u^3}, \quad Y = \frac{4yzu(z^2 - yu)}{u^3},$$

$$Z = \frac{4y^2}{u^6}(z^8 + y^4u^4 + 10y^2z^4u^2 - 4y^3z^2u^3 - 12yuz^6),$$

et, par suite, on obtient l'identité

$$(z^4 - y^2u^2 + 2yuz^2)^4 + z^4yu(yu - 2z^2)[2(z^2 - yu)]^4$$
$$= (z^8 + y^4u^4 + 10y^2u^2z^4 - 4z^2y^3u^3 - 12yuz^6)^2.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 398.

Si maintenant on pose

$$z^2 = x_1, \quad yu = -y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} &(y^2 + 2xy - x^2)^4 + yx^2(y + 2x)(2x + 2y)^4 \\ &\quad = (x^4 + y^4 + 10x^2y^2 + 4y^3x + 12yx^3)^2. \end{aligned} \right.$$

De l'identité précédente, on peut déduire plusieurs autres. Si d'abord on y remplace y par $y_1 - x$, et qu'après la substitution on change x^2 en x, puis que l'on efface les accents, on a

$$(57) \quad (y^2 - 2x)^4 + x(y^2 - x)(2y)^4 = (y^4 - 4x^2 + 4xy^2)^2.$$

Changeons maintenant dans l'identité (57) x en $-xy$, et il viendra

$$(58) \quad (y + 2x)^4 - xy^2(x + y) \times 2^4 = (y^2 - 4x^2 - 4xy)^2.$$

Enfin, si dans cette dernière identité on pose

$$x = \frac{(x_1 - y_1)^2}{2}, \quad y = 2x_1y_1,$$

puis que l'on efface les accents, on a

$$(59) \quad (x^2 + y^2)^4 - x^2y^2(x^2 - y^2)^2 \times 2^4 = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2)^2.$$

Les identités (56), (57), (58) et (59) montrent que l'équation (55) peut être résolue, lorsque, a et c étant égaux à l'unité, b est de l'une des formes $yx^2(y+2x)$, $y(y+2x^2)$, $x(y^2 - x)$, $-xy^2(x+y)$, $-x(x+y^2)$, $-x^2y^2(x^2-y^2)^2$.

La dernière forme se rapporte au cas des nombres congruents par rapport à deux carrés. On voit, en effet, que l'identité (59) se décompose en ces deux autres

$$(60) \quad (x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 + 2xy)^2,$$

$$(61) \quad (x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 - 2xy)^2,$$

et qu'ainsi on peut trouver des valeurs de X, Y, U et V satisfaisant en même temps aux deux équations

$$X^2 + aY^2 = U^2, \quad X^2 - aY^2 = V^2,$$

lorsque a est de la forme $xy\,(x^2 - y^2)$. On prouve d'ailleurs aisément que la condition est nécessaire.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours trouver une infinité de valeurs de c, telles que l'équation* (55) *puisse être résolue en nombres entiers.*

En faisant d'abord dans les formules (27) $z = 0$, $u = 0$, on a

$$X = x^2, \quad Y = 2xy, \quad U = y^2, \quad V = 0.$$

Si l'on remplace ensuite dans les formules (23) X, x, ... respectivement par X', X, ..., et que l'on y fasse $z_1 = 1$, $u_1 = 0$, on a

$$X' = Xx_1 + rU + rVy_1, \quad Y' = Xy_1 + Yx_1 + rV,$$
$$U' = X + Ux_1 + Yy_1, \quad V' = Vx_1 + Y + Uy_1;$$

et, en mettant dans ces dernières formules les expressions de X, Y, U, V que donnent les précédentes, on a

$$X' = x^2x_1 + ry^2, \quad Y' = 2xyx_1 + x^2y_1,$$
$$U' = y^2x_1 + 2xyy_1 + x^2, \quad V' = y^2y_1 + 2xy.$$

Si ensuite on égale à zéro U' et V', et que l'on résolve, par rapport à x_1 et y_1, les équations ainsi obtenues, on a

$$x_1 = \frac{3x^2}{y^2}, \quad y_1 = \frac{-2x}{y};$$

et, en substituant ces valeurs de x_1, y_1 dans X', Y' et dans Z_1 [Z_1 désigne le résultat de la substitution de x_1,

y_1, z_1 à x, y, z dans l'expression (25) de Z], on obtient

$$X' = \frac{3x^4 + ry^4}{y^2}, \quad Y' = \frac{4x^3y}{y^2}, \quad Z_1 = \frac{81x^8 + 14rx^4y^4 + r^2y^8}{y^8}.$$

Multipliant maintenant par Z_1 les deux membres de l'équation (26), où l'on remplace X, Y, U, V respectivement par X', Y', o, o, les nouvelles valeurs de X, Y, Z, c'est-à dire X', Y', Z_1, étant données par les formules précédentes, après avoir remplacé r par $\frac{-b}{a}$, on aura l'identité

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &a(3ax^4 - by^4)^4 + b(4ax^3y)^4 \\ &= (81a^3x^8 - 14a^2bx^4y^4 + ab^2y^8)(ax^4 + by^4)^2. \end{aligned}\right.$$

Le théorème VII se trouve ainsi démontré.

15. *Recherche des formules qui donnent une infinité de solutions de l'équation (55) lorsque l'on connaît une première solution, mais seulement dans le cas où a et c sont égaux à* 1.

Si l'on fait $a = 0$ et que l'on change b en $-b$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) du n° 4, on a

$$\begin{gathered} X_2^2 - bY_2^2 = Z^4, \\ X_2 = x^4 + 6bx^2y^2 + b^2y^4, \\ Y_2 = 4xy(x^2 + by^2), \quad Z = x^2 - by^2; \end{gathered}$$

et, par suite, il vient

$$(x^4 + 6bx^2y^2 + b^2y^4)^2 - 16bx^2y^2(x^2 + by^2)^2 = (x^2 - by^2)^4.$$

Changeons maintenant dans l'identité précédente x, y en x^2, y^2, puis supposons que (x, y, z) soit une solution de l'équation

$$(63)\qquad X^4 + bY^4 = Z^2;$$

alors, de l'identité précédente, on déduit

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

De là il suit que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (63), on en aura une seconde (X, Y, Z) par les formules

$$(64) \quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + 4bx^4y^4.$$

Les formules précédentes sont dues à Lagrange, qui les démontre, moins simplement que nous l'avons fait, dans son Mémoire déjà plusieurs fois cité (*); mais son analyse a l'avantage de pouvoir s'étendre sans modification au cas où l'équation (63) contient en plus le terme dx^2y^2. Il suffit, en effet, de prendre pour point de départ, au lieu de l'identité employée par Lagrange,

$$(x^2 - by^2)^2 + b(2xy)^2 = (x^2 + by^2)^2,$$

l'identité un peu plus générale (6). On a alors les formules

$$(65) \quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + (4b - d^2)x^4y^4.$$

Remarque. — On peut encore donner plusieurs autres démonstrations des formules (64). On les démontre d'abord très-simplement par la méthode de Fermat, et aussi par un moyen que j'ai indiqué dans les *Nouvelles Annales* (**) : voici encore une nouvelle manière de les démontrer.

Remplaçant dans les formules (25) et (27) z par t et r par $-b$, puis résolvant par rapport à t et u les équations que l'on obtient en égalant à zéro U et V, on a

$$u = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 + by^4}}{-by}, \quad t = -\frac{xu}{y}.$$

(*) Voyez le t. IV des *OEuvres de Lagrange*, p. 395. — Édition Serret.

(**) *Voir* la question 1324, numero d'août 1879.

Or, si l'on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation (63), il vient

$$u = -\frac{x^2+z}{by}, \quad t = \frac{x(x^2+z)}{by^2};$$

et, en substituant ces valeurs de u et t dans les expressions de X, Y, Z données par les formules (25) et (27), on a

$$X = \frac{2(x^2+z)(x^4-by^4)}{by^4}, \quad Y = \frac{4(x^2+z)xyz}{by^4},$$

$$Z = \frac{4(x^2+z)^2(z^4+4bx^4y^4)}{b^2y^8},$$

et, par suite, l'identité

$$(x^4-by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4+4bx^4y^4)^2.$$

La démonstration s'achève alors comme la première.

16. *Formules nouvelles qui permettent, connaissant une solution* (x, y, z) *de l'équation générale* (55), *d'en trouver une autre* (X, Y, Z).

Changeons d'abord, dans les formules (23) du n° 6, $X, x, y, z, u, \ldots$, en $X_1, X, Y, U, V, \ldots$ et faisons-y $z_1 = u_1 = 0, x_1 = y_1 = 1$: on a

$$X_1 = X + rV, \quad Y_1 = X + Y, \quad U_1 = Y + U, \quad V_1 = U + V.$$

Si ensuite, dans les formules (27), on fait $x = 0$, $y = ru$, on a

$$X = r(z^2 + 2ru^2), \quad Y = 2rzu,$$
$$U = (r^2 + r)u^2, \quad V = 2rzu,$$

et, par suite,

$$X_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2rzu), \quad Y_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2zu),$$
$$U_1 = ru[(r+1)u + 2z], \quad V_1 = ru[(r+1)u + 2z].$$

En posant maintenant

$$z = -\frac{(r+1)u}{2},$$

on a

$$X_1 = \frac{ru^2}{4}(-3r^2+6r+1), \quad Y_1 = \frac{ru^2}{4}(r^2+6r-3),$$
$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0.$$

D'ailleurs Z_1 est égal à $1-r$, et, en faisant dans l'expression de Z (25)

$$x = 0, \quad y = ru, \quad z = -\frac{r+1}{2}u,$$

on obtient

$$Z = \frac{r^2u^4}{16}(r^4 - 28r^3 + 6r^2 - 28r + 1);$$

on a donc l'identité

$$\begin{aligned}&(3r^2-6r-1)^4 - r(3-6r-r^2)^4\\ &\quad = (1-r)(r^4-28r^3+6r^2-28r+1)^2,\end{aligned}$$

ou, en remplaçant r par $\frac{-y}{x}$,

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}&x(3y^2+6xy-x^2)^4 + y(3x^2+6xy-y^2)^4\\ &\quad = (x+y)(x^4+y^4+28xy^3+28yx^3+6x^2y^2)^2.\end{aligned}\right.$$

L'identité précédente peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}&x[3(x+y)^2-4x^2]^4 + y[3(x+y)^2-4y^2]^4\\ &\quad = (x+y)[4(x+y)^4-3(x-y)^4]^2,\end{aligned}$$

et, en y changeant x, y respectivement en ax^4, by^4, on a

$$\begin{aligned}&a\{x[3(ax^4+by^4)^2-4a^2x^8]\}^4 + b\{y[3(ax^4+by^4)^2-4b^2y^8]\}^4\\ &\quad = (ax^4+by^4)[4(ax^4+by^4)^4-3(ax^4-by^4)^4]^2.\end{aligned}$$

Si maintenant on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation proposée, on déduit de l'identité précédente l'équation

$$a[x(3c^2z^4 - 4a^2x^8)]^4 + b[y(3c^2z^4 - 4b^2y^8)]^4$$
$$= c\{z[4c^4z^8 - 3(ax^4 - by^4)^4]\}^3,$$

et, par suite, on aura une nouvelle solution (X, Y, Z) par les formules

$$(67)\quad \begin{cases} X = x(3c^2z^4 - 4a^2x^8), \quad Y = y(3c^2z^4 - 4b^2y^8), \\ Z = z[4c^4z^8 - 3(ax^4 - by^4)^4]. \end{cases}$$ [1]

17. *Résolution de l'équation*

$$(68)\qquad aX^4 + bY^4 = cZ^3.$$

Je me contenterai de démontrer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation* (68) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Faisant d'abord $z = 0$, $u = 0$ dans les formules (29), on a

$$X_1 = x^3, \quad Y_1 = 3x^2y, \quad U_1 = 3xy^2, \quad V_1 = y^3.$$

Si ensuite on change dans les formules (23) $X, x, \ldots$ en $X', X, \ldots$; qu'on y fasse $u_1 = 0$, $z = 1$, puis qu'on y remplace X_1, Y_1, U_1, V_1 par les expressions précédentes,

---

(1) J'étais déjà arrivé à ce résultat nouveau par une autre méthode (*Comptes rendus* du 7 octobre 1878); cette même méthode donne aussi les formules suivantes, qui s'appliquent au cas où l'équation biquadratique contient en plus le terme dx^2y^2 :

$$X = x[4bcy^4z^2 - (ax^4 - by^4)^2], \quad Y = y[4acx^4z^2 - (ax^4 - by^4)^2],$$
$$Z = z\{f[2x^2y^2(ax^4 - by^4)]^2 - (c^2z^4 - fx^4y^4)\}^2.$$

(Dans la dernière formule, on a représenté par f la quantité $d^2 - 4ab$.)

on a

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} X' &= x^3x_1 + ry^3y_1 + 3rxy^2,\\ Y' &= 3xy^2y_1 + x^3y_1 + ry^3,\\ U' &= 3xy^2x_1 + 3x^2yy_1 + x^3,\\ V' &= y^3x_1 + 3xy^2y_1 + 3x^2y;\end{aligned}\right.$$

et si l'on résout par rapport à x_1, y_1 les équations que l'on obtient en égalant U′ et V′ à zéro, il vient

$$x_1 = \frac{x^2}{y^2}, \quad y_1 = -\frac{4x}{3y}.$$

Si maintenant on substitue ces valeurs dans les expressions (69) de X′, Y′ et aussi dans Z_1 où l'on a d'abord fait $u = 0$, $v = 0$ [(Z_1 est, comme à l'ordinaire, le résultat de la substitution de x_1, y_1, z_1 à x, y, z dans l'expression de Z (25)], on a

$$X' = \frac{x(3x^4 + 5ry^4)}{3y^2},$$

$$Y' = \frac{y(5x^4 + 3ry^4)}{3y^2},$$

$$Z = \frac{81x^8 + 158rx^4y^4 + 81r^2y^8}{81y^8}.$$

Alors, en procédant comme on l'a fait pour obtenir l'identité (62), on a, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, l'identité

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} &a[x(3ax^4 - 5by^4)]^4 + b[y(5ax^4 - 3by^4)]^4\\ &\quad = (81a^2x^8 - 158abx^4y^4 + 81b^2y^8)(ax^4 + by^4)^3,\end{aligned}\right.$$

qui démontre le théorème énoncé.

18. *Résolution de l'équation*

$$(70)\qquad aX^4 + bY^4 = cZ^4.$$

Si l'on part de l'identité évidente

$$(71)\qquad (x+2y)^4-(x-2y)^4=xy(x^2+4y^2)\times 2^4$$

et qu'on y change x, y en x^4, y^4, on a

$$(72)\qquad (x^4+2y^4)-(x^4-2y^4)^4=(x^8+4y^8)\times(2xy)^4.$$

On peut encore obtenir une troisième identité de la manière suivante.

En faisant $a=0$ et $b=1$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) et (5), on a

$$(x^4-6x^2y^2+y^4)^2+[4xy(x^2-y^2)]^2=(x^2+y^2)^4;$$

et, si l'on multiplie par 2 les deux membres de l'identité précédente, puis que l'on y remplace une expression de la forme $2(s^2+t^2)$ par $(s+t)^2+(s+t)^2$, il vient

$$\begin{aligned}&[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^2+[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^2\\&\quad=[2(x^2+y^2)]^4.\end{aligned}$$

On vérifie d'ailleurs facilement que l'on a

$$\begin{aligned}&[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^2-[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^2\\&\quad=16xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2];\end{aligned}$$

et en multipliant, membre à membre, les deux dernières identités, on obtient

$$(73)\quad\left\{\begin{aligned}&[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^4\\&\qquad-[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^4\\&\qquad\quad=2xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2](2x^2+2y^2)^5.\end{aligned}\right.$$

Remarque. — On peut encore obtenir l'identité précédente en partant de l'identité (59), dont on met le second membre sous la forme $[(y^2+2x^2)^2-8x^2]^2$, et il ne reste plus qu'à remplacer, au moyen d'un changement de variables, la quantité entre crochets par un carré; ce qui n'offre aucune difficulté.

Les identités (71), (72) et (73) montrent que l'équation (70) peut être résolue en nombres entiers lorsque, a et b étant respectivement égaux à 1 et — 1, c a l'une des formes

$$xy(x^2+4y^2),\quad x^8+4y^8,\quad 2xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2].$$

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème IX. — *Lorsque a et b sont des nombres entiers quelconques, on peut trouver une infinité de valeurs de c telles, que l'équation* (70) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Prenons l'identité (30) du n° 6. Les valeurs de X_2, Y_2, U_2, V_2 n'ont pas été calculées; mais, si l'on suppose z et u nuls, on obtient aisément, par la méthode ordinaire,

$$X_2 = x^4+ry^4,\quad Y_2=4x^3y,\quad U_2=6x^2y^2,\quad V_2=4xy^3.$$

Si l'on suppose maintenant que l'on multiplie par Z_1 les deux membres de l'équation (30), Z_1 ayant la signification connue, ainsi que X', Y', U, V', on a, en faisant $u_1=0$, $z_1=1$,

$$\begin{aligned}
X' &= (x^4+ry^4)x_1+4rxy^3y_1+6rx^2y,\\
Y' &= 4x^3yx_1+(x^4+ry^4)y_1+4rxy^3,\\
U' &= 6x^2y^2x_1+4x^3yy_1+x^4+ry^4,\\
V' &= 4xy^3x_1+6x^2y^2y_1+4x^3y,\\
Z_1 &= (x_1^2-r)^2-ry_1^2(y_1^2-4x_1);
\end{aligned}$$

puis, si l'on résout par rapport à x_1, y_1 les équations $U'=0$, $V'=0$, on a les valeurs

$$x_1=\frac{5x^4-3ry^4}{10x^2y^2},\quad y_1=\frac{ry^4-5x^4}{5x^2y^2},$$

que l'on substitue dans Z', Y', U', V', Z_1. On voit alors que, en remplaçant r par $-\frac{b}{a}$, on peut prendre pour valeurs de X', Y', Z_1, Z satisfaisant à l'identité

$$(74) \qquad aX'^4 + bY'^4 = Z_1 Z^4,$$

$$X' = x(5a^2x^8 - 22abx^4y^4 + 5b^2y^8),$$

$$Y' = 2y(5a^2x^8 - 10abx^4y^4 + b^2y^8),$$

$$\begin{aligned} Z_1 = {} & 625a^5x^{20} - 3500a^4bx^{16}y^4 + 5350a^3b^2x^{12}y^8 \\ & - 860a^2b^3x^8y^{12} - 79ab^4x^4y^{16} + 16b^5y^{20}, \end{aligned}$$

$$Z = ax^4 + by^4.$$

Le théorème IX est ainsi démontré.