Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 161-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__161_1>

SUR UNE MÉTHODE POUR OBTENIR PAR APPROXIMATION LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE QUI A TOUTES SES RACINES RÉELLES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Quand on a une valeur suffisamment approchée d'une racine d'une équation, la méthode d'approxima-

tion de Newton et la méthode des parties proportionnelles fournissent toutes les deux des moyens commodes et rapides d'approcher indéfiniment de cette racine. La principale difficulté consiste à obtenir cette première valeur approchée que l'on doit prendre comme point de départ.

Je ne crois pas que, si l'on considère la question dans toute sa généralité, il y ait beaucoup à ajouter à ce que l'on sait déjà; il me semble que le problème doit être posé différemment et de la façon suivante :

Une équation étant donnée (ou, si l'on veut, un type d'équations étant donné), trouver une méthode qui conduise de la façon la plus sûre et la plus rapide aux valeurs approchées de ses racines.

La Note qui suit a pour objet de donner une solution de ce problème dans le cas où l'équation proposée est algébrique et a toutes ses racines réelles. Les équations de ce genre se présentent du reste, comme on le sait, très fréquemment dans un grand nombre de questions importantes de l'Analyse.

II.

2. Soient

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique du degré n, et α, β, γ, ... ses différentes racines; on a l'identité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \dots \tag{2}$$

Si x est une valeur suffisamment approchée de la racine α, la quantité $\frac{1}{x-\alpha}$ qui figure dans le second membre de cette relation est très grande, tandis que les autres quantités $\frac{1}{x-\beta}$, $\frac{1}{x-\gamma}$, ... ont des valeurs beaucoup plus petites; on aura donc sensiblement

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha},$$

et de cette formule on déduit une valeur approchée de α qui ne diffère pas, comme il est aisé de le voir, de la valeur donnée par la méthode d'approximation de Newton.

Je ne chercherai pas ici à corriger cette méthode en essayant d'obtenir une valeur approchée des termes négligés

$$\frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots;$$

je prendrai plutôt comme point de départ l'équation suivante, que l'on obtient en dérivant l'identité (2) :

$$\frac{f'^2 - ff''}{f^2} = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2} + \ldots.$$

On en déduit que, α désignant une racine quelconque de l'équation (1), on a

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} < \frac{f'^2 - ff''}{f^2}.$$

En convenant donc, pour plus de clarté, de représenter les différentes valeurs que peut prendre la variable x par des longueurs portées sur une droite à partir d'une origine fixe, on voit que, si l'on représente par un point M une valeur arbitraire attribuée à x et si l'on porte de part et d'autre du point M une longueur égale en valeur absolue à

$$\frac{f}{\sqrt{f'^2 - ff''}},$$

aucune racine de l'équation (1) ne peut se trouver entre les extrémités N et N' des segments ainsi déterminés, en sorte que les racines de cette équation seront ou supérieures au nombre déterminé par le point N' ou inférieures au nombre déterminé par le point N.

3. Cette propriété n'est évidemment qu'un cas particulier d'une propriété plus générale et renfermant une constante arbitraire.

Toutes les fois, en effet, qu'une proposition relative à des polynômes entiers ne comprend pas uniquement dans son énoncé des covariants (simples ou multiples de ces polynômes), elle est un cas particulier d'une proposition plus générale, dans l'énoncé de laquelle n'entrent que des covariants, et cette proposition plus générale peut se déduire immédiatement de la proposition particulière dont je viens de parler ([1]).

C'est ce que je pourrais faire ici; mais, pour être mieux compris dans un premier exemple, je suivrai une autre marche et partirai de l'identité suivante, où ξ désigne une quantité arbitraire et où le signe Σ s'étend à toutes les racines de l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
\sum\left(\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}\right)^2 &= \sum\frac{(\xi-x+x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2}\\
&= (\xi-x)^2\sum\frac{1}{(x-\alpha)^2}+2(\xi-x)\sum\frac{1}{x-\alpha}+n\\
&= (\xi-x)^2\frac{f'^2-ff''}{f^2}+2(\xi-x)\frac{f'}{f}+n\\
&= \frac{nf^2+2(\xi-x)ff'+(\xi-x)^2(f'^2-ff'')}{f^2}\\
&= \frac{[nf+(\xi-x)f']^2+(\xi-x)^2[(n-1)f'^2-nff'']}{nf^2}.
\end{aligned}$$

([1]) C'est de la même façon qu'en Géométrie tout théorème dans lequel la droite de l'infini ou les ombilics du plan jouent un rôle particulier est un cas particulier d'un théorème plus général dans lequel les ombilics sont remplacés par deux points quelconques du plan. Il est du reste, comme on le sait, très facile de passer du théorème particulier

Pour transformer cette relation, j'introduirai la fonction $f(x, y)$ homogène des deux variables x et y, qui se réduit à $f(x)$ quand on y fait $y = 1$; en supposant donc que cette variable soit toujours, dans la suite des calculs, remplacée par l'unité, j'aurai

$$f(x) = f(x, y)$$

et, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$nf + (\xi - x)f' = \xi f'_x + f'_y.$$

Le polynôme $(n-1)f'^2 - nff''$ ne diffère que par un facteur purement numérique du covariant de $f(x, y)$ que l'on désigne sous le nom de *hessien ;* je le représenterai par la lettre H, en sorte que la relation précédente pourra s'écrire

$$(3) \qquad \sum\left(\frac{\xi - \alpha}{x - \alpha}\right)^2 = \frac{(\xi f'_x + f'_y)^2 + (\xi - x)^2 \mathrm{H}}{nf^2}.$$

4. En représentant par P le second membre de cette égalité (P est évidemment toujours positif, et il en est de même, comme on le sait, du covariant H), je considère les deux racines X′ et X″ de l'équation

$$(4) \qquad \left(\frac{\xi - \mathrm{X}}{x - \mathrm{X}}\right)^2 = \mathrm{P},$$

que l'on peut écrire

$$\mathrm{P}(x - \mathrm{X})^2 - (\xi - \mathrm{X})^2 = 0.$$

Si, dans le premier membre de cette équation, on remplace X par la valeur d'une racine quelconque α de l'équation (1), on obtient un résultat positif, car, en

---

au theorème general ; j'ai le premier résolu cette question, relativement aux relations angulaires, dans ma *Note sur la theorie des foyers* (*Nouvelles Annales de Mathematiques*, 1853, p. 57) vertu de l'identité (3), on a évidemment

$$\left(\frac{\xi - \alpha}{x - \alpha}\right)^2 < \mathrm{P}.$$

On conclut de là que *toutes les racines* de l'équation (1) sont comprises dans l'un des intervalles compris entre les nombres X′ et X″ [1].

Si, au contraire, on remplace X par x, on obtient un résultat négatif, d'où l'on voit que celui des deux segments déterminés par les points X′ et X″ qui renferme toutes les racines est celui en dehors duquel est situé le point x.

5. Supposons, pour fixer les idées, que α et β désignent deux racines consécutives de l'équation (1) (α étant $< \beta$) et que nous donnions à x une valeur arbitraire comprise entre ces deux racines; désignons par X′ et X″ les deux racines de l'équation (4), X′ étant la plus petite des racines.

Il suit de ce qui précède que X′ et X″ sont situés, *quelle que soit la quantité* ξ, de part et d'autre du point x, et que toutes les racines sont ou supérieures à X″ ou inférieures à X′; X′ et X″ sont donc respectivement des valeurs approximatives des racines α et β plus approchées que la quantité x dont on est parti.

Plus généralement, on peut dire que :

Si l'on désigne par x une quantité prise arbitrairement dans l'intervalle compris entre deux racines consécutives α et β de l'équation (1), *et par* X′ *et* X″ *les*

---

[1] On peut passer de la valeur X′ à la valeur X″ sans passer par l'infini, ce qui donne un premier intervalle; le second intervalle comprend la valeur infinie de la variable ou, si l'on veut, le point situé à l'infini sur la droite dont les differents points représentent les valeurs de la variable.

deux racines de l'équation (4), *les quantités*

$$\alpha,\ X',\ x,\ X'',\ \beta$$

sont placées par ordre croissant ou décroissant de grandeur [1], *quelle que soit la quantité* ξ.

En particulier, si l'on suppose $\xi = \infty$, l'équation (4) devient

$$\frac{1}{(x-X)^2} = \frac{f'^2 - ff''}{f^2},$$

et l'on retrouve la proposition que j'ai démontrée tout d'abord (n° 2).

Pour établir la proposition générale, il suffit même de la supposer démontrée dans ce cas particulier; en introduisant en effet, pour l'homogénéité, des variables Y et η égales à l'unité, l'équation (4) peut se mettre sous la forme suivante,

$$\left(\frac{\xi Y - X\eta}{xY - Xy}\right)^2 = \frac{(\xi f'_x + \eta f'_y)^2 + (\xi y - \eta x)^2 H}{nf^2},$$

où l'on voit clairement qu'elle ne renferme que des covariants de la forme $f(x, y)$. Si donc la proposition énoncée est vraie pour une valeur particulière de ξ, elle est vraie (puisque, pour emprunter le langage de la Géométrie, elle est projective) pour toute autre valeur de la même variable.

III.

6. Il résulte des considérations précédentes que, x désignant une quantité prise arbitrairement entre deux racines consécutives α et β de l'équation proposée, on peut trouver une infinité de systèmes de nombres X' et

[1] Si, en particulier, on considère la plus petite racine α et la plus grande racine β de l'equation, on doit les regarder comme consécutives, l'intervalle qui les sépare comprenant la valeur infinie de la variable.

X″ jouissant de la propriété que X′ soit compris dans l'intervalle αx et X″ dans l'intervalle $x\beta$.

Comme on peut donner à ξ des valeurs arbitraires, on peut rechercher quelles sont les valeurs de X′ et de X″ qui se rapprocheront le plus de α et de β, et il suffit évidemment de résoudre la question dans le cas particulier où $x = \infty$; de là on passera sans difficulté au cas général.

En posant

$$f(x) = ax^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} + \ldots,$$

on trouve aisément que

$$H = n^2(n-1)(b^2 - ac)x^{2(n-2)} + \ldots$$

et qu'en faisant $x = \infty$ la formule (4) devient

$$(\xi - X)^2 = \frac{n(a\xi + b)^2 + n(n-1)(b^2 - ac)}{a^2},$$

d'où l'équation suivante, qui détermine les valeurs de X,

$$\begin{aligned}(n-1)a^2\xi^2 + 2a(nb + aX)\xi \\ + n^2b^2 - n(n-1)ac - a^2X^2 = 0.\end{aligned}$$

Les valeurs extrêmes de X s'obtiendront en exprimant que cette équation a ses racines égales; elles seront ainsi déterminées par la relation

$$(nb + aX)^2 - (n-1)[n^2b^2 - n(n-1)ac - a^2X^2] = 0,$$

qui peut s'écrire, toutes réductions faites,

$$a^2X^2 + 2abX + (n-1)^2ac - n(n-2)b^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$X = \frac{-b \pm (n-1)\sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'une de ces valeurs est une limite supérieure des racines de l'équation proposée, l'autre en est une limite inférieure ([1]).

7. Cette proposition n'est évidemment qu'un cas particulier d'une proposition plus générale relative à une valeur arbitraire de x, le cas que je viens de considérer correspondant à $x = \infty$.

Pour la trouver, je mettrai la relation précédente sous la forme

$$(5) \qquad (naX + nb)^2 - n^2(n-1)^2(b^2 - ac) = 0,$$

([1]) Cette proposition peut s'etablir directement de la façon suivante. En designant par α, β, γ, ... les racines de l'equation $f(x) = 0$, par s_1 la somme de ces racines et par s_2 la somme de leurs carres, on a evidemment

$$\Sigma(x-\alpha)^2 = nx^2 - 2s_1x + s_2$$

En designant par α l'une quelconque des racines, on a donc

$$(x-\alpha)^2 < nx^2 - 2s_1x + s_2;$$

d'où l'on voit que le polynôme

$$(n-1)x^2 + 2(\alpha - s_1)x + s_2 - \alpha^2$$

a toujours une valeur positive. Ses facteurs sont donc imaginaires, et l'on a, pour toute racine de l'equation,

$$(n-1)(s_2 - \alpha^2) - (\alpha - s_1)^2 > 0;$$

par suite, l'équation

$$(n-1)(s_2 - x^2) - (x - s_1)^2 = 0$$

détermine deux limites des racines de l'equation (1).

Elle peut s'ecrire

$$nx^2 - 2s_1x + s_1^2 - (n-1)s_2 = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement s_1 et s_2 par leurs valeurs $-\frac{nb}{a}$ et $\frac{n^2b^2 - n(n-1)ac}{a^2}$,

$$a^2x^2 + 2abx + (n-1)^2ac - n(n-2)b^2 = 0;$$

c'est, sauf la notation, l equation obtenue plus haut par une voie differente.

et je considérerai l'équation suivante,

$$(6) \qquad (\mathrm{X}f'_x + \mathrm{Y}f'_y)^2 - (n-1)(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)^2\mathrm{H} = 0,$$

qui ne renferme que des covariants de $f(x, y)$.

Je remarque que, quand on y fait $x = \infty$, elle se réduit à l'équation (5); sans autre démonstration, on peut donc en conclure que :

Si l'on donne, dans l'équation (6), *à la variable x une valeur comprise entre deux racines consécutives α et β de l'équation* (1), *de ses deux racines X' et X'', l'une est comprise entre α et x et l'autre entre x et β.*

Ces quantités sont d'ailleurs, de toutes celles que l'on peut, en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, déduire de l'équation (4), *celles qui approchent le plus des racines α et β.*

Pour résoudre l'équation (6), j'y fais, pour simplifier l'écriture, $\mathrm{Y} = y = 1$, et, après l'avoir écrit de la façon suivante,

$$[nf + (\mathrm{X} - x)f']^2 = (n-1)(\mathrm{X} - x)^2\mathrm{H},$$

j'extrais la racine carrée des deux membres.

On en déduit

$$(7) \qquad \frac{1}{\mathrm{X} - x} = \frac{-f' \pm \sqrt{(n-1)f'^2 - n(n-1)ff''}}{nf}.$$

8. La formule qui précède résout complètement la question suivante :

Étant donné un nombre arbitraire x, déterminer, sans tâtonnement et par une suite d'opérations régulières, des valeurs de plus en plus approchées de la racine immédiatement supérieure à x ou de la racine qui lui est immédiatement inférieure.

Si, par exemple, on veut déterminer la racine immédiatement supérieure à x, on tirera de la formule (7) une valeur convenable de la correction $X - x$, en prenant le radical (qui détermine le signe du second membre) avec un signe contraire à celui de f; en partant de cette nouvelle valeur ou, pour faciliter les substitutions, de toute autre valeur comprise entre x et X, on continuera les opérations, qui permettront ainsi d'approcher indéfiniment de la racine cherchée.

Quelle que soit la valeur x dont on parle, cette méthode n'est jamais en défaut comme peut l'être la méthode de Newton, et, dans le cas où la méthode de Newton peut être employée avec sûreté, elle donne toujours une approximation plus grande.

Supposons, pour fixer les idées, que nous appliquions la méthode de Newton au nombre x en vue d'obtenir la racine immédiatement supérieure; la correction est égale à

$$-\frac{f}{f'},$$

quantité positive, et l'on a $ff'' > 0$.

La correction proposée est égale à

$$\frac{nf}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-2)ff''}},$$

où le radical doit avoir le même signe que f.

Or, ff'' étant positif, il est clair qu'en valeur absolue le dénominateur est plus petit que nf'; la correction proposée est donc supérieure à celle qui résulte de la formule de Newton, et, comme elle demeure également inférieure à l'excès de la racine cherchée sur le nombre x, elle est plus avantageuse.

(*A suivre.*)