E. COLLIGNON

Note sur les polygones fermés (application de la statique à la géométrie)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 497-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__497_0>

NOTE SUR LES POLYGONES FERMÉS (APPLICATION DE LA STATIQUE A LA GÉOMÉTRIE);

PAR M. E. COLLIGNON,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Considérons un polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre n de côtés.

Nous donnerons à ces côtés les numéros successifs de 1 à n, en suivant le périmètre du polygone dans un sens défini, à partir d'un sommet choisi arbitrairement.

Imaginons qu'on prenne le milieu de chaque côté. On obtiendra ainsi n nouveaux points, auxquels nous donnerons les mêmes numéros qu'aux côtés dont ils font partie. Le milieu du côté n° k sera le milieu n° k. Ce même numéro k sera attribué aussi au sommet du polygone commun aux côtés k et $k-1$; il n'y a d'exception que pour le sommet 1, point de départ du numérotage, qui est commun aux côtés n° n et n° 1.

Ces conventions faites, plaçons aux milieux 1, 2, ..., n des masses égales à m en valeur absolue, mais alternativement positives et négatives; de telle sorte que les milieux 1, 3, 5, ... de rang impair reçoivent la masse $+m$, et que les milieux de rang pair, 2, 4, 6, ..., reçoivent la masse $-m$. Au lieu d'admettre des masses négatives, on peut prendre toutes les masses en valeur absolue, sauf à imaginer qu'elles subissent l'action de forces parallèles dirigées dans un sens pour les masses qui avaient tout à l'heure le signe $+$, et en sens opposé pour les masses qui avaient le signe $-$.

Lorsque le polygone a un nombre impair de côtés, cette distribution alternative des signes amène deux masses positives aux milieux n et 1, qui se suivent sur le contour du polygone; partout ailleurs on aura d'un côté au suivant une variation de signe. Lorsque le nombre n est pair, les variations de signe s'étendent au périmètre tout entier.

Cherchons, dans l'un et l'autre cas, le centre de gravité de l'ensemble des masses qu'on vient de définir.

Décomposons pour cela la masse $\pm m$, appliquée au milieu du côté k, en deux masses égales, $\pm \frac{1}{2} m$, appliquées l'une au sommet k, l'autre au sommet $k+1$. Cette décomposition faite pour tous les côtés, on trouvera, en un sommet k quelconque, une masse $\pm \frac{1}{2} m$ provenant de la décomposition de la masse $\pm m$ située au milieu k, et une masse de signe contraire, $\mp \frac{1}{2} m$, provenant de la décomposition de la masse $\mp m$ située au milieu $k-1$; les deux masses partielles se détruisent et donnent au sommet k une masse nulle. Cette conclusion s'applique au sommet 1 comme à tous les autres lorsque le nombre n est pair; car alors les signes alternatifs règnent sur tout le pourtour du polygone. Il en est autrement si n est impair : le sommet 1 sépare alors deux milieux, 1 et n, chargés tous deux de masses positives; il reçoit deux masses partielles égales à $\frac{1}{2} m$, qui, composées ensemble, forment la masse m. La somme algébrique de toutes les masses est égale à 0 dans le cas de n pair, et à m dans le cas de n impair. On peut formuler ces conclusions comme il suit :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, des masses égales, alternativement positives et négatives, appliquées aux milieux des côtés successifs, se font équilibre et forment un système indifférent; le centre de gravité de leur ensemble est indéterminé.

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre impair de côtés, des masses égales, alternativement positives et négatives, appliquées aux milieux des côtés successifs, ont pour résultante une masse égale, placée au sommet du polygone qui appartient à la fois aux deux côtés consécutifs chargés de masses de même signe; ce sommet est le centre de gravité de l'ensemble des masses données.

Ce théorème fournit une solution simple de certains problèmes sur les polygones. Pour en développer les conséquences, nous examinerons successivement le cas de n impair et de n pair.

Premier cas : n impair.

Étant donnés dans l'espace n points, numérotés de 1 à n, on demande de construire un polygone fermé de n côtés, dont les n points donnés soient les milieux des côtés successifs.

On cherchera le centre de gravité G, ou centre des moyennes distances, des milieux de rang impair, 1, 3, 5, ..., n; on y imaginera réunies $\frac{n+1}{2}$ masses égales positives.

On cherchera ensuite le centre de gravité G′ des milieux de rang pair, 2, 4, 6, ..., $n-1$; on y réunira $\frac{n-1}{2}$ masses égales négatives.

Le centre de gravité général sera le sommet 1 du polygone. On l'obtiendra en cherchant sur la droite GG′ le point d'application de la résultante de deux forces parallèles, l'une égale à $\frac{n+1}{2}$ appliquée en G, l'autre égale à $\frac{n-1}{2}$, appliquée en G′ en sens contraire de la première. Cela revient à prolonger la droite G′G, du côté du point G, d'une longueur G 1 égale à $\frac{n-1}{2}$ GG'. Le coefficient $\frac{n-1}{2}$ de GG' est toujours entier, puisque n est impair.

Le sommet 1 une fois déterminé, tout le polygone s'en déduit.

Le problème admet toujours une solution et une seule :

Lorsque les milieux donnés sont dans un même plan, le polygone cherché est tout entier dans ce plan. On le voit par la construction du sommet 1. Mais la proposition est évidente *a priori ;* car, si le polygone était gauche, chaque côté traverserait le plan des milieux, et un nombre impair d'intersections empêcherait la fermeture du polygone.

Si, au lieu de prendre les masses m alternativement positives et négatives, on les prenait toutes positives, elles s'ajouteraient pour donner une résultante égale à nm, appliquée en un point γ, centre des moyennes distances des milieux des côtés du polygone ou, ce qui revient au même, centre des moyennes distances de tous les sommets. Pour obtenir ce point γ, il suffira de composer les mêmes forces parallèles, égales à $\frac{n+1}{2}$ et à $\frac{n-1}{2}$, que nous avons considérées tout à l'heure, mais en les dirigeant toutes deux dans le même sens, au lieu de les diriger l'une en sens contraire de l'autre. La force $\frac{n+1}{2}$ est appliquée au point G, la force $\frac{n-1}{2}$ au point G'. Le point d'application γ de la résultante s'obtiendra en partageant GG' dans le rapport inverse des composantes, ce qui donne la proportion

$$\frac{G\gamma}{G'\gamma} = \frac{n-1}{n+1}.$$

On a de même, puisque le sommet 1 est le point d'application de la résultante des mêmes forces dirigées en sens différents,

$$\frac{G1}{G'1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Donc

$$\frac{G\gamma}{G'1} = \frac{G1}{G'1},$$

de sorte que le sommet 1 et le point γ sont conjugués harmoniques par rapport aux points G et G'; et l'on a ce théorème :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre impair des côtés, le sommet 1 est conjugué harmonique du centre de gravité de tous les sommets (ou de tous les milieux des côtés) par rapport aux centres de gravité des deux groupes de points respectivement formés par les milieux des côtés de rang impair, et par les milieux des côtés de rang pair.

Chacun des sommets du polygone peut d'ailleurs être regardé comme le sommet n° 1, en changeant le numérotage. Dans chacune de ces hypothèses, le centre de gravité général γ reste fixe; la droite qui joint au point γ un sommet du polygone contient les centres de gravité, G et G', des deux groupes de milieux, les milieux impairs et les milieux pairs, et la droite mobile GG' est divisée, au point fixe γ et au sommet, dans le rapport constant $\frac{n-1}{n+1}$. On en déduit que le rapport $\frac{\gamma G}{\gamma 1}$ est aussi constant, et égal à $\frac{1}{n+1}$, et que le rapport $\frac{\gamma G'}{\gamma 1}$ est égal à $\frac{1}{n-1}$. Donc :

Les centres de gravité partiels G et G' des masses + m et — m, alternativement placées aux milieux des *côtés, sont les sommets de deux polygones homothétiques au polygone donné; le centre de similitude est le point* γ*, centre de gravité général des masses prises toutes positivement, et placées soit au milieu des côtés, soit aux sommets; les rapports de similitude sont res-respectivement* $\frac{1}{n+1}$ *et* $\frac{1}{n-1}$*; enfin la similitude est directe pour le polygone des points* G, *inverse pour le polygone des points* G$'$.

On pourrait dire aussi :

Le centre de gravité des milieux des côtés de rang impair, 1, 3, 5, ..., n *coïncide avec le centre de gravité des milieux des côtés de rang pair,* 2, 4, 6, ..., $n-1$, *composés avec le sommet* 1.

Les propriétés des centres de gravité s'étendent aisément, d'après les mêmes considérations, à la géométrie des polygones.

Prenons par exemple un point P, arbitraire, et joignons-le à tous les milieux 1, 2, 3, ..., n des côtés d'un polygone donné, d'un nombre impair de côtés. Pour distinguer les milieux des sommets de même numéro, nous donnerons aux milieux des numéros accentués. Ils seront donc représentés par les numéros $1'$, $2'$, $3'$, ..., n'. Cela posé, nous pouvons regarder les droites de jonction $P1'$, $P2'$, ..., Pn' comme représentant autant de forces en grandeur et en direction. Les propositions qu'on vient d'établir montrent que la résultante des n forces

$$P1',\quad -P2',\quad P3',\quad -P4',\quad \ldots,\quad -P(n-1)',\quad +Pn',$$

parmi lesquelles les forces dirigées vers les milieux pairs sont changées de sens, est égale à la force $P1$, représentée par la ligne de jonction du point P au sommet 1.

La démonstration directe de cette proposition est très facile.

De même, appliquons au système des masses $+m$ et $-m$ le théorème sur la somme du produit des masses par les carrés des distances à un point, ou sur le moment d'inertie polaire : il viendra l'équation fondamentale

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{P}1'}^2-\overline{\mathrm{P}2'}^2+\overline{\mathrm{P}3'}^2-\overline{\mathrm{P}4'}^2+\ldots-\overline{\mathrm{P}(n-1)'}^2+\overline{\mathrm{P}n'}^2\\ =\,&\overline{11'}^2-\overline{12'}^2+\overline{13'}^2-\overline{14'}^2+\ldots-\overline{1(n-1)'}^2+\overline{1n'}^2+\overline{\mathrm{P}1}^2.\end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer cette équation en prenant successivement pour sommet 1 chaque sommet du polygone. Appelons

$$\mathrm{A},\quad \mathrm{B},\quad \mathrm{C},\quad \ldots,\quad \mathrm{E}$$

les sommets successifs, et

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad e$$

les milieux des côtés

$$\mathrm{AB},\quad \mathrm{BC},\quad \mathrm{CD},\quad \ldots,\quad \mathrm{EA}.$$

Appliquons le théorème en prenant d'abord pour sommet 1 le sommet A, puis le sommet B, puis le sommet C, et ainsi de suite jusqu'au sommet E. Il viendra la série de n équations

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{P}a}^2-\overline{\mathrm{P}b}^2+\overline{\mathrm{P}c}^2-\overline{\mathrm{P}d}^2+\ldots+\overline{\mathrm{P}e}^2\\ =\,&\overline{\mathrm{A}a}^2-\overline{\mathrm{A}b}^2+\overline{\mathrm{A}c}^2-\overline{\mathrm{A}d}^2+\ldots+\overline{\mathrm{A}e}^2+\overline{\mathrm{PA}}^2,\\ &\overline{\mathrm{P}b}^2-\overline{\mathrm{P}c}^2+\overline{\mathrm{P}d}^2+\ldots\ldots\ldots+\overline{\mathrm{P}a}^2\\ =\,&\overline{\mathrm{B}b}^2-\overline{\mathrm{B}c}^2+\overline{\mathrm{B}d}^2+\ldots\ldots\ldots+\overline{\mathrm{B}a}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\overline{\mathrm{P}e}^2-\overline{\mathrm{P}a}^2+\overline{\mathrm{P}b}^2+\ldots\ldots\ldots+\overline{\mathrm{P}d}^2\\ =\,&\overline{\mathrm{E}e}^2-\overline{\mathrm{E}a}^2+\overline{\mathrm{E}b}^2+\ldots\ldots\ldots+\overline{\mathrm{E}d}^2+\overline{\mathrm{PE}}^2.\end{aligned}$$

Faisons la somme, membre à membre, de ces n équations.

On trouvera dans le premier membre de l'équation résultante $\frac{n+1}{2}$ fois chaque terme $\overline{Pa}^2$ avec le signe $+$, et $\frac{n-1}{2}$ fois avec le signe $-$; le résultat final est donc simplement le terme $\overline{Pa}^2$ sans aucun coefficient, et, pour les n termes analogues, on trouve en définitive

$$\overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 + \overline{Pc}^2 + \ldots + \overline{Pe}^2 = \Sigma \overline{Pa}^2,$$

pour le premier membre de l'équation finale.

Le second membre contiendra des termes de diverses espèces :

1° On a d'abord la somme

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \ldots + \overline{PE}^2 = \Sigma \overline{PA}^2$$

des carrés des distances du point P aux n sommets;

2° On a ensuite les sommes

$$\overline{Aa}^2 + \overline{Ba}^2, \quad \overline{Bb}^2 + \overline{Cb}^2, \quad \ldots . \quad \overline{Ee}^2 + \overline{Ae}^2$$

des carrés des moitiés des côtés, qui sont égales respectivement à

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2, \quad \tfrac{1}{2}\overline{BC}^2, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}\overline{EA}^2,$$

et qui donnent par leur ensemble la moitié de la somme des carrés des côtés, ou $\frac{1}{2}\Sigma\overline{AB}^2$;

3° Tous les autres termes enfin, pris les uns positivement, les autres négativement, peuvent être réunis dans une même somme. Posons

$$\begin{aligned}
S = \; & \overline{Ab}^2 - \overline{Ac}^2 + \ldots\ldots\ldots + \overline{Ad}^2 \\
& + \overline{Bc}^2 - \overline{Bd}^2 + \ldots\ldots\ldots - \overline{Be}^2 \\
& + \overline{Cd}^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \overline{Ca}^2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \overline{Ea}^2 - \overline{Eb}^2 + \overline{Ec}^2 - \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Cette somme S est la somme algébrique des carrés des distances de chaque sommet aux milieux des côtés qui n'aboutissent pas à ce sommet, ces carrés étant pris alternativement avec le signe + et le signe —, suivant que la différence des numéros du sommet et des milieux considérés est impaire ou paire.

On a donc, en définitive, l'équation

$$(1) \qquad \Sigma\,\overline{Pa}^2 = \Sigma\,\overline{PA}^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\overline{AB}^2 - S.$$

Mais, dans chaque triangle PAB, où a est le milieu de AB, on a

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{Pa}^2 + 2\overline{Aa}^2;$$

relation qui, appliquée successivement à tous les côtés, donne, en faisant la somme et en divisant par 2,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \ldots + \overline{PE}^2 = \overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 + \ldots + \overline{Pe}^2 + \overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2 + \ldots + \overline{Ee}^2$$

ou bien

$$(2) \qquad \Sigma\,\overline{PA}^2 = \Sigma\,\overline{Pa}^2 + \tfrac{1}{4}\Sigma\,\overline{AB}^2.$$

Ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), il vient, après réduction,

$$\tfrac{3}{4}\Sigma\,\overline{AB}^2 - S = 0$$

ou bien

$$S = \tfrac{3}{4}\Sigma\,\overline{AB}^2,$$

et l'on a ce théorème :

Dans tout polygone fermé d'un nombre impair de côtés, la somme algébrique des carrés des distances des milieux de chaque côté aux sommets non contigus, ces carrés étant pris alternativement avec le signe + et le signe — à partir du côté le plus voisin de chaque *milieu considéré, est égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.*

On en déduit comme corollaires les propositions suivantes :

Dans tout polygone régulier d'un nombre impair de côtés, la somme algébrique des carrés des distances du milieu d'un côté à tous les sommets non contigus, ces carrés étant pris alternativement avec le signe + et le signe —, est les $\frac{3}{4}$ du carré du côté;

Dans tout triangle, la somme des carrés des médianes est les $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.

Second cas : n pair.

Soit en second lieu un polygone fermé d'un nombre pair n de côtés. Prenons à part les milieux des côtés de rang impair, $1, 3, 5, \ldots, n-1$, puis les milieux des côtés de rang pair, $2, 4, 6, \ldots, n$. Ces deux groupes de points en contiennent un même nombre $\frac{n}{2}$, et pour que le centre de gravité général des masses $+m$ et $-m$ soit indéterminé, il faut et il suffit que le centre de gravité G du groupe des masses positives coïncide avec le centre de gravité du groupe des masses négatives; le point G est en outre le centre de gravité de tous les milieux ou, ce qui revient au même, de tous les sommets. On arrive donc à ce théorème :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, le centre des moyennes distances des milieux des côtés de rang pair coïncide avec le centre des moyennes distances des milieux des côtés de rang impair et avec le centre des moyennes distances de tous les sommets.

Cet énoncé généralise le théorème relatif au quadrilatère :

Dans tout quadrilatère plan ou gauche, les milieux des côtés successifs sont les sommets d'un parallélogramme, ce qui revient à dire que les droites qui joignent respectivement les milieux des côtés opposés se coupent mutuellement en deux parties égales.

Si l'on donne les n milieux des côtés d'un polygone, le nombre n étant pair, et qu'on demande de construire le polygone, en prenant ces milieux dans un ordre déterminé, il faut, pour que le problème soit possible, qu'en prenant ces milieux de deux en deux, les centres de gravité des deux groupes de points que l'on obtient coïncident. Quand cette condition est remplie, on peut construire le polygone d'une infinité de manières, en partant d'un sommet 1 arbitrairement choisi. S'il en est autrement, il n'y a pas de solution possible.

Prenons un point P quelconque dans l'espace. Si l'on joint ce point aux milieux des côtés $1, 2, \ldots, n$, et que l'on considère les lignes de jonction comme représentant des forces en grandeur et en direction, on reconnaît sur le champ que *l'ensemble des forces, agissant alternativement dans le sens de la droite de jonction et en sens contraire, c'est-à-dire des forces*

$$P1, \quad -P2, \quad P3, \quad -P4, \quad \ldots, \quad P(n-1), \quad -Pn,$$

se fait équilibre; en d'autres termes, *les deux groupes de forces*

$$P1, \quad P3, \quad P5, \quad \ldots, \quad P(n-1),$$

et

$$P2, \quad P4, \quad P6, \quad \ldots, \quad Pn,$$

ont la même résultante.

Appliquons aux systèmes des masses m et $-m$ le théorème sur la somme des carrés des distances. Il vient d'abord, en considérant à part les masses positives ou impaires,

$$\overline{\mathrm{P}1}^2 + \overline{\mathrm{P}3}^2 + \overline{\mathrm{P}5}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}(n-1)}^2$$
$$= \overline{\mathrm{G}1}^2 + \overline{\mathrm{G}3}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{G}(n-1)}^2 + \overline{\mathrm{PG}}^2 ;$$

on aura de même, en prenant les masses négatives ou paires,

$$\overline{\mathrm{P}2}^2 + \overline{\mathrm{P}4}^2 + \overline{\mathrm{PG}}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}n}^2 = \overline{\mathrm{G}2}^2 + \overline{\mathrm{G}4}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{G}(n)}^2 + \overline{\mathrm{PG}}^2 .$$

Si l'on retranche ces deux équations, il vient

$$\overline{\mathrm{P}1}^2 - \overline{\mathrm{P}2}^2 + \overline{\mathrm{P}3}^2 - \overline{\mathrm{P}4}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}(n-1)}^2 - \overline{\mathrm{P}n}^2$$
$$= \overline{\mathrm{G}1}^2 - \overline{\mathrm{G}2}^2 + \overline{\mathrm{G}3}^2 - \overline{\mathrm{G}4}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{G}(n-1)}^2 - \overline{\mathrm{G}n}^2 ,$$

équation dont le second membre est indépendant de la position du point P. Par conséquent :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, la somme algébrique des carrés des distances d'un point P *quelconque aux milieux des côtés, les carrés étant pris alternativement avec le signe* $+$ *et le signe* $-$, *est constante, quel que soit le point* P.

Cette proposition résulte immédiatement de la remarque suivante : le point P, quel qu'il soit, peut être regardé comme le centre de gravité du système indifférent formé par les masses $+m$ et $-m$, placées alternativement au milieu des côtés.

Si le polygone donné est régulier, la somme

$$\overline{\mathrm{G}1}^2 - \overline{\mathrm{G}2}^2 + \ldots$$

est identiquement nulle; il en est donc de même de la somme égale

$$\overline{\mathrm{P}1}^2 - \overline{\mathrm{P}2}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}(n-1)}^2 - \overline{\mathrm{P}n}^2 ;$$

de sorte que la somme des carrés des distances d'un point P quelconque aux milieux impairs est la même que la somme des carrés des distances du point P aux milieux pairs, et, comme les milieux des côtés d'un polygone régulier sont les sommets d'un polygone régulier semblable au premier, on peut dire aussi que *la somme des carrés des distances du point* P *aux sommets de rang pair d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est égale à la somme des carrés des distances du point* P *aux sommets de rang pair.*

Généralisation du théorème fondamental.

Soit ABCD ... F un polygone plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés. Prenons sur le côté AB un point a arbitraire, puis sur le côté BC un point b, tel que le rapport $\frac{Bb}{Bc}$ soit égal au rapport $\frac{Ba}{AB}$; de même prenons sur CD un point c tel qu'on ait $\frac{Cc}{CD} = \frac{Cb}{BC}$, puis un point d sur DE tel qu'on ait $\frac{Dd}{DE} = \frac{Dc}{CD}$, et ainsi de suite, en renversant, à chaque fois qu'on passe d'un côté au suivant, l'ordre des segments homologues tout en en conservant le rapport. Cela revient à dire que les droites ab, bc, cd, ..., qui joignent les points de jonction consécutifs, sont parallèles respectivement aux diagonales AC, BD, DE, ... du polygone.

Si l'on appelle k le rapport $\frac{Aa}{AB}$, on aura

$$\frac{Ba}{AB} = 1 - k = \frac{Bb}{Bc} = \frac{Dc}{CD} = \frac{De}{DE} = \ldots = \frac{Ff}{FA},$$
$$\frac{Aa}{AB} = k = \frac{Cb}{BC} = \frac{Cc}{CD} = \ldots = \frac{Af}{FA}.$$

Cela posé, si l'on applique une masse $+m$ aux points

a, c, e, ..., de deux en deux côtés, et une masse $-m$ aux points b, d, ..., f, on pourra décomposer chaque masse m appliquée à un côté AB en deux masses, l'une appliquée en A et égale à $(1-k)m$, l'autre en B, et égale à km; et chaque masse $-m$ appliquée à un côté BC en deux masses, l'une appliquée en B et égale à $-km$, l'autre en C et égale à $-(1-k)m$. L'ensemble de ces masses pour tout le polygone donnera zéro à tous les sommets; et, par conséquent, le centre de gravité des points a, c, e, ... coïncide avec le centre de gravité des points b, d, ..., f.

Pour le quadrilatère, par exemple, les droites ac, bd se coupent mutuellement en deux parties égales, quelle que soit la valeur du rapport k qui définit la position des points.

La même généralisation peut s'appliquer aux polygones qui ont un nombre impair de côtés, mais alors la construction des points a, b, c, ..., f doit s'arrêter dès qu'on a atteint le dernier côté du polygone donné. Dans ces conditions, les masses $+m$ aux points a, c, ..., f, et $-m$ aux points b, d, ... amènent, quand on les décompose en masses appliquées aux sommets, une masse unique égale à $+m$, appliquée au premier sommet A; de sorte que le sommet A est en ligne droite avec le centre de gravité g des points a, c, ..., f, et le centre de gravité g' des points b, d, ..., et la distance Ag est égale à $\frac{n-1}{2}gg'$, n étant le nombre des côtés du polygone.

Cette remarque permet de construire un polygone de n côtés (n étant impair), si l'on donne les n points a, b, c, ..., f qui partagent les côtés dans un même rapport, en renversant l'ordre des segments pour chaque côté successif.