

## Sur l'enveloppe de certaines droites variables (suite)

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 5  
(1886), p. 88-97

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1886\\_3\\_5\\_\\_88\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__88_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES

[suite (1)];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

---

LA SURFACE COMPRISE ENTRE L'ARC  $ab$  ET SA CORDE EST  
CONSTANTE.

Dans ce cas, les aires élémentaires décrites par les  
droites  $ea$  et  $eb$  étant égales, on a, en appelant  $\varepsilon$  l'angle  
de contingence de l'enveloppe au point  $e$ ,

$$\varepsilon \cdot ea^2 = \varepsilon \cdot eb^2$$

ou

$$ea = eb.$$

*Le point  $e$  est donc le milieu de  $ab$ .*

Si la courbe donnée  $C$  se compose d'un système de  
deux droites concourantes, la courbe enveloppe est une  
hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes.

---

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 3<sup>e</sup> série, t. II, 1883, p. 252.— Dans les  
figures du présent Article, les gros traits indiquent les lignes données,  
les traits fins les lignes de construction, enfin les traits pointillés  
les lignes qui n'interviennent que dans la démonstration.

LA DIFFÉRENCE ENTRE L'ARC  $ab$  ET SA CORDE EST CON-  
STANTE.

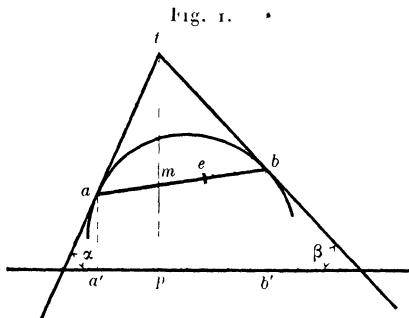
La démonstration est de tous points analogue à celle qui a été donnée <sup>(1)</sup> pour le cas où la somme de l'arc et de la corde est constante; on trouve que le point  $e$  est, dans ce cas, *le point de contact sur  $ab$  du cercle inscrit dans le triangle formé par cette corde et les tangentes à ses extrémités.*

Il en résulte que, si la courbe  $C$  se compose de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est un cercle tangent à ces deux droites.

LA PROJECTION DE LA CORDE  $ab$  SUR UN AXE FIXE EST  
CONSTANTE.

Soit  $a'b'$  cette projection (*fig. 1*). On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at \cdot ae}{bt \cdot be}.$$



D'ailleurs

$$d(a) = \frac{d(a')}{\cos \alpha}, \quad d(b) = \frac{d(b')}{\cos \beta},$$

et comme  $d(a') = d(b')$ , par hypothèse,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.* p. 254.

Donc

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{at \cdot ae}{bt \cdot be} \quad \text{ou} \quad \frac{ae}{be} = \frac{bt \cdot \cos \beta}{at \cdot \cos \alpha} = \frac{b'p}{a'p} = \frac{bm}{am};$$

de là résulte que

$$ac = bm,$$

ce qui détermine le point  $e$ .

En particulier, si la courbe donnée est une parabole ayant son axe perpendiculaire à  $a'b'$ , la droite  $tm$  étant parallèle à l'axe passe par le milieu de  $ab$ , et le point  $e$  se confond alors avec ce point milieu, c'est-à-dire avec le point où  $ab$  touche son enveloppe si cette droite forme avec la parabole un segment d'aire constante; de là ce théorème :

*Si une droite mobile forme avec une parabole un segment d'aire constante, la projection de ce segment de droite sur la directrice est constante.*

L'ARC  $ab$  DÉTERMINE, AVEC DEUX DROITES ISSUES D'UN POINT FIXE, UN SECTEUR D'AIRE CONSTANTE.

Les aires élémentaires engendrées par les droites  $ao$  et  $bo$  (*fig. 2*) tournant d'un angle infiniment petit autour du point  $o$ , devant être égales, puisque l'aire  $oacb$  est constante, nous avons, en abaissant du point  $o$  les perpendiculaires  $o\mu$  et  $o\nu$  sur  $at$  et  $bt$ ,

$$d(a) \cdot o\mu = d(b) \cdot o\nu;$$

donc

$$\frac{o\nu}{o\mu} = \frac{ae \cdot at}{be \cdot bt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{ae}{be} = \frac{bt \cdot o\nu}{at \cdot o\mu},$$

ou, en abaissant des points  $a$  et  $b$  les perpendiculaires  $ap$  et  $bq$  sur  $ot$ ,

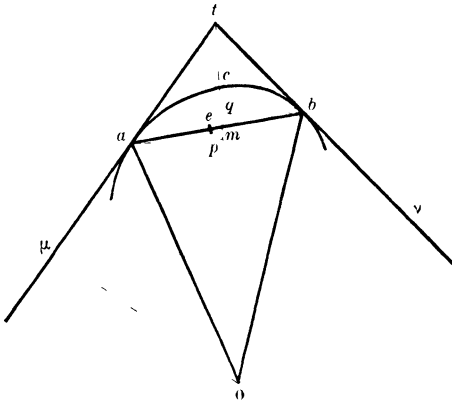
$$\frac{ae}{be} = \frac{ot \cdot bq}{ot \cdot ap} = \frac{bq}{ap} = \frac{bm}{am},$$

c'est-à-dire

$$ae = bm.$$

La construction se réduit donc à ceci : *ot coupant ab au point m, porter  $ae = bm$ .*

Fig. 2.



Si la courbe donnée se compose de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est une parabole tangente à ces droites.

Si la courbe donnée est une conique de centre  $o$ , le point  $m$ , et, par suite, le point  $e$ , vient se confondre avec le milieu de  $ab$ , d'où l'on déduit ce théorème :

*Si une corde  $ab$  se déplace dans une conique de centre  $o$  de telle façon que le triangle  $oab$  ait une aire constante, le secteur d'ellipse  $oab$  a également une aire constante.*

LES PARALLÈLES A DEUX DIRECTIONS FIXES MENÉES PAR LES POINTS  $a$  ET  $b$  SE COUPENT SUR UNE COURBE DONNÉE.

Soient  $am$  et  $bm$  ces droites (*fig. 3*). Puisqu'elles restent parallèles à des directions fixes, on a, en sup-

( 92 )

posant  $xy$  tangente à la courbe décrite par le point  $m$ ,

$$\frac{d(b)}{d(m)} = \frac{by}{my}, \quad \frac{d(m)}{d(a)} = \frac{mx}{ax};$$

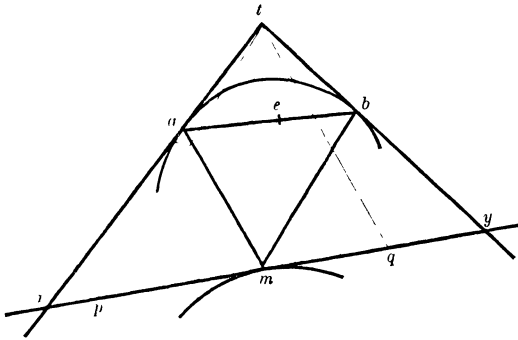
d'ailleurs

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, nous avons

$$\frac{at.ae.by.mx}{bt.be.my.ax} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{ae}{be} = \frac{bt.my.ax}{at.by.mx}.$$

Fig. 3.



Tirons  $tp$  parallèle à  $mb$ ,  $tq$  parallèle à  $ma$ : nous avons

$$mp = \frac{bt.my}{by}, \quad mq = \frac{at.mx}{ax};$$

donc

$$\frac{ae}{be} = \frac{mp}{mq},$$

expression qui fournit une facile construction du point  $e$ .

Comme application, supposons que la courbe donnée soit un système de deux droites concourantes  $tp$  et  $tq$ , que le point  $m$  doive décrire la droite  $pq$ , enfin que les directions fixes soient précisément celles de  $tp$  et  $tq$ ; la

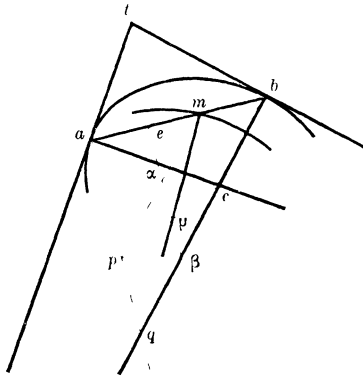
courbe enveloppe sera alors une parabole tangente à  $tp$  et  $tq$  aux points  $p$  et  $q$ . De là ce théorème :

*tp et tq étant tangentes à une parabole aux points p et q, ab, tangente à cette courbe au point e, coupant tp et tq aux points a et b, ab est divisé par le point e dans le même rapport que pq par le pied de la droite qui joint le point t au milieu de ab.*

LA CORDE  $ab$  EST COUPÉE PAR UNE COURBE FIXE EN SEGMENTS DE RAPPORT CONSTANT.

Soit  $m$  le point où le segment  $ab$  est coupé par la courbe fixe (fig. 4); le rapport  $\frac{am}{bm}$  est constant; donc, si les normales  $ax$  et  $b\beta$  à la première courbe,  $m\mu$  à la

Fig. 4.



seconde, coupent en  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\mu$  la normale menée par le point  $e$  à l'enveloppe de  $ab$ , on a

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{am}{bm}.$$

En  $a$  élevons à  $ab$  la perpendiculaire  $aq$  qui coupe  $c\mu$

( 94 )

au point  $p$ ; nous avons

$$\frac{ap}{qp} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{am}{bm};$$

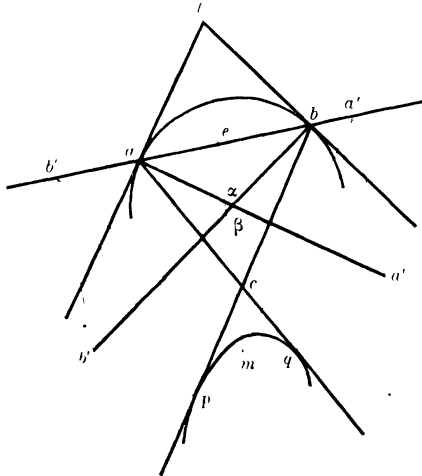
donc la droite  $mp$  est parallèle à  $bq$ ; de là, la construction suivante :

*Elever à  $ab$  la perpendiculaire  $ap$ ; tirer  $mp$  parallèle à  $b\beta$ ,  $cp$  coupant  $m\mu$  au point  $\mu$ , abaisser de  $\mu$  sur  $ab$  la perpendiculaire  $\mu e$ .*

LES TANGENTES MENÉES DES POINTS  $a$  ET  $b$  A UNE COURBE FIXE FORMENT UN ANGLE CONSTANT.

Soient  $aq$  et  $bp$  ces tangentes (*fig. 5*); les normales  $aa'$  et  $bb'$  à la première courbe coupent aux points  $a'$  et

Fig. 5.



$b'$  les normales  $qa'$  et  $pb'$  à la secunde. L'angle  $pcq$  étant constant, les angles de contingence aux points  $p$  et  $q$



( 95 )

sont égaux ; par suite

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{aa'}{bb'}$$

D'ailleurs, si  $ex$  est normale à l'enveloppe cherchée, on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{\alpha x}{b\beta}$$

Donc

$$\frac{\alpha x}{aa'} = \frac{b\beta}{bb'}$$

ou, si  $a'a''$  et  $b'b''$  sont perpendiculaires à  $ab$ ,

$$\frac{ae}{aa''} = \frac{be}{bb''}$$

On déduit de là que, si  $a''m$  est parallèle à  $at$  et  $b''m$  à  $bt$ , le point  $m$  se trouve sur  $te$ . On peut d'ailleurs remarquer que, le quadrilatère  $aq a' a''$  étant inscriptible, on a

$$\widehat{aqa''} = \widehat{a'a''},$$

et comme  $\widehat{aa'a''} = \widehat{tab}$ , puisque ces angles ont leurs côtés perpendiculaires, on a aussi

$$\widehat{aqa} = \widehat{tab}.$$

De même

$$\widehat{bpb} = \widehat{tba}.$$

On pourra donc énoncer comme suit la construction du point  $e$  :

*Faire  $aq a'' = \widehat{tab}$  et  $bpb'' = \widehat{tba}$ ; mener  $a''m$  parallèle à  $at$  et  $b''m$  parallèle à  $bt$ ; tirer  $mt$  qui coupe  $ab$  au point  $e$ .*

Si la courbe enveloppée par  $aq$  et  $bp$  se réduit à un point, on retombe sur un cas déjà traité (1). Mais la construction précédente appliquée à ce cas particulier est moins simple que la construction donnée à l'endroit cité. Les conditions spéciales du problème conduisent en effet, dans ce cas, à des simplifications qui n'ont pas leur équivalent dans le cas général.

Si l'angle  $atb$  des tangentes en  $a$  et  $b$  à la courbe considérée (2) est constant, si la droite  $ab$  touche son enveloppe au point  $e$  et si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les centres de courbure qui répondent aux points  $a$  et  $b$ , nous avons vu (3<sup>e</sup> série, t. II, p. 258) que le point  $o$  étant tel qu'on voie de ce point les rayons de courbure  $ax$  et  $b\beta$  sous des angles droits, les angles  $aob$  et  $toe$  ont même bissectrice.

Mais le point  $o$  peut être imaginaire; c'est ce qui arrive lorsque les cercles de diamètres  $ax$  et  $b\beta$  ne se coupent pas. La construction qui résulte du théorème précédent devient alors illusoire. Voici un nouveau théorème qui donne la solution du problème dans tous les cas

*Si les droites  $tx$  et  $t\beta$  coupent respectivement aux points  $\alpha'$  et  $\beta'$  le cercle circonscrit au triangle  $atb$ , les droites  $a\beta'$  et  $b\alpha'$  se coupent en un point  $g$  dont la projection sur la droite  $ab$  est précisément le point  $e$ .*

En effet (3), appelons pour le moment  $e'$  la projection du point  $g$  sur la droite  $ab$ . Nous avons  $\widehat{eag} = \widehat{bt\beta}$  et  $\widehat{ebg} = \widehat{atx}$  (même mesure); les triangles rectangles  $eag$

(1) *Nouvelles Annales*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 256.

(2) Il est bien entendu qu'ici, comme dans tout ce qui précède, cette courbe peut être un système de deux courbes distinctes décrites séparément par les points  $a$  et  $b$ .

(3) Le lecteur est prié de faire la figure

et  $bt\beta$  d'une part,  $ebg$  et  $atz$  de l'autre, sont donc semblables; par suite,

$$\frac{ae'}{ge'} = \frac{bt}{b\beta}, \quad \frac{be'}{ge'} = \frac{at}{az},$$

d'où

$$\frac{ac'}{be'} = \frac{bt}{at} \cdot \frac{az}{b\beta}.$$

Or, en se reportant à l'endroit cité, on voit que

$$\frac{ae \cdot at}{be \cdot bt} = \frac{az}{b\beta},$$

donc

$$\frac{ae'}{be'} = \frac{ae}{be},$$

et le point  $e'$  se confond avec le point  $e$ .

Remarquons que le cercle circonscrit au triangle  $atb$  a pour diamètre la droite qui joint le point  $t$  au point de rencontre des normales  $az$  et  $b\beta$ .