J.-L.-W.-V. JENSEN

Sur un théorème général de convergence

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 196-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__196_1>

SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE;

PAR M. J.-L.-W.-V. JENSEN.

Des recherches que j'ai entreprises en vue d'une généralisation de la théorie de convergence d'une série à termes positifs ont en même temps donné une simplification imprévue de la présente théorie. Les critères de Cauchy, de Duhamel et Raabe, de Bertrand, etc., peuvent dès lors être exposés en quelques lignes comme simples corollaires d'un théorème général, comme nous le verrons immédiatement.

THÉORÈME. — *La série à termes positifs Σu_n sera convergente, si, à partir d'une certaine valeur du nombre entier et positif n,*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu, \tag{1}$$

a_n étant une fonction positive de n et μ une constante positive.

De l'inégalité (1) en découle une autre

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}).$$

d'où il suit

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+m} u_{n+m}) < \frac{1}{\mu} a_n u_n.$$

Le théorème est donc démontré.

En posant $a_n = 1$, on a le critère de convergence de Cauchy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > \mu \quad \text{ou} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu,$$

et le reste de la série à partir du terme u_n sera plus petit que $\frac{1}{\mu} u_n$.

Si, au contraire,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \quad \text{d'où} \quad u_n < u_{n+1},$$

u_n est croissant avec n, et la série sera divergente.

En posant $a_n = n$, on a le critère de Duhamel

$$n \frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1 > \mu \quad \text{ou} \quad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \mu.$$

et le reste sera plus petit que $\frac{1}{\mu} n u_n$.

Si, au contraire,

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1, \quad \text{d'où} \quad n u_n < (n+1) u_{n+1},$$

$n u_n$ est croissant avec n, et la série sera divergente.

Pour $a_n = n \log n$, $n \log n \log\log n$, ..., nous aurons les critères de M. Bertrand.

Étant donnée une série quelconque à termes positifs Σu_n, il n'y a aucune difficulté à démontrer que l'on peut toujours trouver un a_n satisfaisant à l'inégalité (1) et que l'on peut même choisir a_n d'une telle manière que $\sum \frac{1}{a_n}$ soit divergente. Le théorème en question est donc général dans le domaine des séries à termes positifs, aussi bien que le suivant :

THÉORÈME. — *La série à termes positifs* Σu_n *sera* $\left\{\begin{matrix}\textit{convergente}\\ \textit{divergente}\end{matrix}\right\}$, *si, à partir d'une certaine valeur de* n,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \left\{\begin{matrix} > \mu, \\ < 0, \end{matrix}\right.$$

a_n *et* μ *étant positifs et la série* $\sum \frac{1}{a_n}$ *divergente.*

Dans le second cas, qui seul reste à démontrer, on a pour $n \geqq n'$,

$$a_n u_n > a_{n'} u_{n'} \qquad \text{ou} \qquad u_n > \frac{1}{a_n} a_{n'} u_{n'}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En général, nous pouvons prendre $a_n = \frac{\lambda_n}{b_{n+1} - b_n}$, si λ_n reste fini, tandis que b_n grandit sans cesse et infiniment avec n.