MAURICE D'OCAGNE

Quelques propriétés de l'ellipse ; déviation, écart normal

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 268-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__268_1>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE [1]; DÉVIATION, ÉCART NORMAL;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Nous avons appelé *déviation* en un point d'une ellipse l'angle que la tangente à l'ellipse en ce point fait avec la tangente correspondante au cercle principal.

Cet angle est égal à l'angle que la normale MN fait

---

(1) Cette étude fait suite à celles que nous avons publiées dernièrement et dont voici les titres :

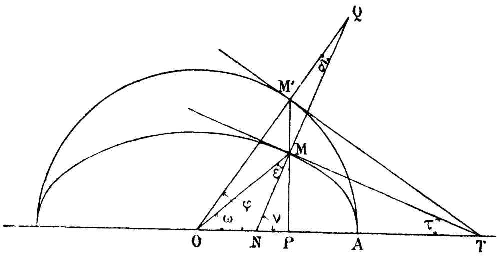
1° *Étude géométrique sur l'ellipse* (*Revue maritime et coloniale*, p. 167; octobre 1886).

2° *De la déviation dans l'ellipse* (*Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. V, p. 370 et 534; 1886).

avec le diamètre correspondant OM′ du cercle principal (*fig.* 1).

Les variations de cet angle donnent une indication intéressante sur la nature de l'ellipse considérée. Nous

Fig. 1.



avons fait voir de quelle façon simple elles pouvaient être déduites de celles de l'*anomalie excentrique* (¹). On trouvera plus loin un autre mode de corrélation géométrique entre ces deux angles.

Auparavant nous ferons observer que l'inclinaison de la normale sur le diamètre correspondant qui s'accuse plus ou moins, suivant que l'ellipse considérée est plus ou moins différente du cercle, mérite aussi d'être envisagée spécialement. Nous appellerons cet angle de la normale et du diamètre en un point de l'ellipse l'*écart normal* en ce point.

Nous développerons plus loin une méthode fort simple qui permet de suivre avec la plus grande facilité les variations simultanées de la *déviation* et de l'*écart normal* lorsqu'on fait varier graduellemet l'*anomalie excentrique*.

Mais nous commencerons par traiter le problème de

(¹) *Nouv. Ann. de Math.*, 3ᵉ série. t. V, p. 534.

l'écart normal comme nous avons fait du problème de la déviation.

2. Si nous désignons par

φ l'anomalie excentrique AOM';
δ la déviation OQN;
ε l'écart normal OMN;
ω l'angle polaire AOM;
τ l'angle MTO de la tangente avec le grand axe;
ν l'angle MNT de la normale avec le grand axe,

nous avons, par la considération du triangle OMT,

$$\varepsilon = \pi - (\omega + \tau) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (\omega + \tau):$$

donc

$$\cot\varepsilon = \operatorname{tang}(\omega + \tau) = \frac{\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}\tau}{1 - \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}\tau}.$$

Mais on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{b}{a}\cot\varphi.$$

Par suite,

$$\cot\varepsilon = \frac{\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi + \frac{b}{a}\cot\varphi}{1 - \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi\,\frac{b}{a}\cot\varphi} = \frac{2ab}{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi},$$

ou

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{2ab}\sin 2\varphi. \tag{1}$$

L'écart normal ε atteint évidemment son maximum ε_1 pour la valeur φ_1 de φ, telle que

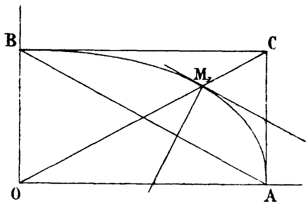
$$\sin 2\varphi_1 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Le point correspondant de l'ellipse se trouve (*fig.* 2) sur la diagonale OC du rectangle OABC circonscrit au quart d'ellipse, et comme la tangente en ce point est parallèle à AB, on voit que l'écart normal maximum est

Fig. 2.



donné par l'angle que fait la droite OC avec la direction perpendiculaire à AB. Ce résultat se vérifie bien aisément au moyen de la formule (1) où l'on a fait $\sin 2\varphi$ égal à 1.

3. Après cet aperçu rapide sur l'étude directe des variations de l'écart normal, nous allons aborder la méthode dont nous avons parlé en commençant.

Nous commencerons pour cela par résoudre le double problème que voici :

Étant donnés une ellipse rapportée à ses axes et un point quelconque, trouver le lieu des points d'intersection des parallèles aux normales à l'ellipse menées par ce point :

1° *Avec les diamètres correspondants de l'ellipse;*

2° *Avec les diamètres correspondants du cercle principal de cette ellipse.*

La solution de ce problème est immédiate.

Pour le point de l'ellipse dont l'anomalie excentrique est φ, l'équation du diamètre du cercle principal est

$$(2) \qquad y = x \tang \varphi;$$

celle du diamètre de l'ellipse,

$$y = x\,\frac{b}{a}\,\mathrm{tang}\,\varphi. \tag{3}$$

D'ailleurs on a

$$\mathrm{tang}\,v = \cot\tau = \frac{a}{b}\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

L'équation de la parallèle à la normale menée par le point donné (α, β) est donc

$$y - \beta = \frac{a}{b}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(x - \alpha). \tag{4}$$

Éliminant l'angle φ entre les équations (3) et (4), on a la solution de la première partie du problème,

$$(a^2 - b^2)xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0. \tag{5}$$

Éliminant l'angle φ entre les équations (2) et (4), on a la solution de la seconde

$$(a - b)xy - a\alpha y + b\beta x = 0. \tag{6}$$

Arrêtons-nous quelques instants à ces deux équations.

Elles représentent toutes deux des hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse, passant toutes deux par le centre de cette courbe (l'origine) et par le point (α, β).

La première de ces hyperboles [éq. (5)], par suite même de sa définition, passe par les pieds des quatre normales que l'on peut du point (α, β) mener à l'ellipse considérée; la seconde [éq. (6)], en vertu d'un théorème qui sera démontré plus loin (n° 12), passe par quatre des points d'intersection de ces normales et du cercle de rayon $a + b$ concentrique à l'ellipse.

Le centre de la première hyperbole a pour coordonnées

$$x' = \frac{a^2 \alpha}{c^2}, \qquad y' = -\frac{b^2 \beta}{c^2}.$$

Nous retrouvons ainsi un point remarquable que nous avons déjà rencontré dans une autre recherche ([1]) : *c'est le centre de gravité des points de rencontre de la conique donnée et d'un cercle de rayon quelconque ayant pour centre le point* (α, β).

Nous avons déjà remarqué, *loco citato,* que *ce point est à la rencontre de la droite qui joint les projections orthogonales du point* (α, β) *sur les axes de l'ellipse, avec le diamètre conjugué de celui qui est, par rapport à la bissectrice de l'angle des axes, symétrique de celui qui passe par le point* (α, β).

Cela résulte d'ailleurs immédiatement de ce que, des formules précédentes, on déduit

$$\frac{x'}{\alpha} + \frac{y'}{\beta} = 1,$$
$$\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Le centre de la seconde hyperbole a pour coordonnées

$$x'' = \frac{a\alpha}{a-b}, \qquad y'' = -\frac{b\beta}{a-b}.$$

De ces formules on tire

$$\frac{x''}{\alpha} + \frac{y''}{\beta} = 1,$$
$$\frac{y''}{x''} = -\frac{b}{a}\frac{\beta}{\alpha}.$$

([1]) *Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. V, p. 298; 1886.

Donc, *le centre de la seconde hyperbole est à la rencontre de la droite qui joint les projections orthogonales du point* (α, β) *sur les axes de l'ellipse et du diamètre symétrique par rapport à l'un ou l'autre des axes de celui qui correspond dans l'ellipse au diamètre du cercle principal passant par le point* (α, β).

4. Lorsque le point (α, β) vient se placer sur l'un des axes de l'ellipse, chacune des deux hyperboles se réduit à cet axe et à une droite qui lui est perpendiculaire.

Supposons, en particulier, le point (α, β) situé sur l'axe des x. Alors $\beta = 0$, et les équations (5) et (6) deviennent

$$(a^2 - b^2)xy - a^2\alpha y = 0,$$
$$(a - b)xy - a\alpha y = 0.$$

Supprimant dans chacune d'elles le facteur y qui correspond à l'axe des x, nous obtenons les équations des deux droites

$$x = \frac{a^2\alpha}{c^2}; \tag{7}$$

$$x = \frac{a\alpha}{a-b}. \tag{8}$$

Ces deux droites sont parallèles à l'axe des y. Désignons-les par les notations Δ et Δ'.

On voit immédiatement que :

Si $\alpha < a - b$, les droites Δ et Δ' coupent toutes deux l'ellipse en deux points réels ;

Si $\alpha = a - b$, la droite Δ' se confond avec la tangente au sommet A ;

Si $a - b < \alpha < \frac{c^2}{a}$, la droite Δ seule coupe l'ellipse en deux points réels ;

Si $\alpha = \frac{c^2}{a}$, la droite Δ se confond avec la tangente au sommet A;

Si $\frac{c^2}{a} < \alpha$, les deux droites Δ et Δ' sont complètement extérieures à l'ellipse.

Appelons H le point de l'axe des x dont l'abscisse est $a - b$, K celui dont l'abscisse est $\frac{c^2}{a}$, c'est-à-dire *le centre de courbure répondant au sommet* A, et, d'une manière générale, par I le point de l'axe des x dont l'abscisse est α.

Les cinq cas sus-énoncés correspondent aux hypothèses :

I situé entre le centre et le point H;
I confondu avec le point H;
I situé entre le point H et le point K;
I confondu avec le point K;
I situé au delà du point K.

Dans cette dernière hypothèse, il y a lieu de distinguer un cas particulièrement intéressant : c'est celui où le point I vient à coïncider avec le foyer F de l'ellipse. Dans ce cas, $\alpha = c$, et l'on a, pour les équations (7) et (8) des droites Δ et Δ',

$$x = \frac{a^2}{c},$$

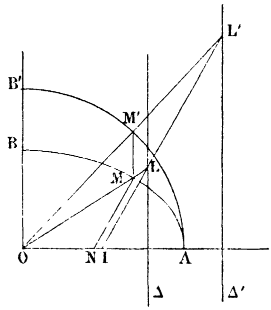
$$x = \frac{ac}{a - b}.$$

Donc, *la droite Δ se confond avec la directrice,* ce qui était à prévoir, puisque la directrice passe par les points de contact de l'ellipse et du cercle bitangent qui a pour centre le foyer, c'est-à-dire par les pieds des normales (autres que le grand axe) menées du foyer à l'ellipse.

5. Ayant pris sur l'axe des x un point I d'abscisse α, considérons les droites Δ et Δ' qui correspondent à ce point, en vertu des équations (7) et (8).

Prenons un point M *sur l'ellipse. Le diamètre* OM *coupe la droite* Δ *au point* L (*fig.* 3), *le diamètre correspondant* OM' *coupe la droite* Δ' *au point* L'. *D'après la propriété qui a servi à définir les droites* Δ *et* Δ', *la droite* LL' *passe par le point* I *et est parallèle à la normale en* M *à l'ellipse.*

Fig. 3.

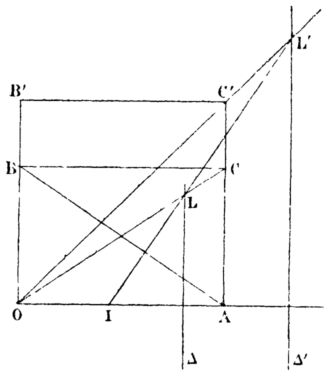


Telle est la relation excessivement simple qui existe entre la direction de la normale MN et celles du diamètre de l'ellipse OM et du diamètre du cercle principal OM' correspondants. De l'une quelconque de ces trois directions, on déduit immédiatement les deux autres.

6. Le problème qui se pose ici est le suivant : *Étant donné le point* I, *construire géométriquement les droites* Δ *et* Δ' *qui lui correspondent.*

Une méthode se présente tout naturellement à l'esprit pour le résoudre : choisir dans l'ellipse un diamètre tel que la normale et le diamètre du cercle principal correspondants soient immédiatement connus. Ce choix est d'ailleurs tout indiqué ; c'est celui du diamètre de l'ellipse qui passe par le point de rencontre C des tangentes aux sommets A et B (*fig.* 4). Le diamètre correspon-

Fig. 4.



dant du cercle principal est la diagonale OC' du carré construit sur le demi grand axe OA. La normale correspondante est perpendiculaire à la droite qui joint les sommets A et B.

Les droites OC *et* OC' *étant tracées, il suffira, du point* I *choisi, d'abaisser sur* AB *une perpendiculaire coupant* OC *en* L *et* OC' *en* L' *pour avoir, en menant par* L *et* L' *des perpendiculaires à* OA, *les droites* Δ *et* Δ'.

Puisque, comme nous l'avons vu, on a pour droite Δ, en prenant pour point I le foyer de l'ellipse, la directrice correspondante, on a ainsi un mode de liaison géométrique très simple entre le foyer et la directrice.

7. *L'angle* OLI (*fig.* 3) *est égal à l'écart normal au point* M; *l'angle* OL'I *est égal à la déviation; l'angle* AOL' *est égal à l'anomalie excentrique.* De là, la méthode que nous avons annoncée en commençant.

Faisant varier l'inclinaison de OL' sur OA de o à $\frac{\pi}{2}$, on suit les variations correspondantes des angles OL'I et OLI qui tous deux partent de zéro pour atteindre chacun un maximum (ces maxima, on va le voir, ne sauraient être simultanés) et décroître ensuite jusqu'à zéro.

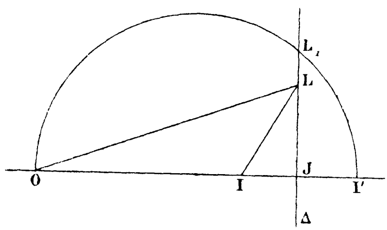
8. La détermination des maxima revient au problème suivant :

De quel point d'une droite Δ *voit-on sous un angle maximum un segment de droite* OI *perpendiculaire à* Δ *et situé tout entier d'un même côté par rapport à cette droite?*

On a (*fig.* 5)

$$\widehat{OLI} = \widehat{JIL} - \widehat{JOL}.$$

Fig. 5.



Donc, en posant $OJ = X_1$, $IJ = X_2$, $JL = Y$,

$$\tan \widehat{OLI} = \frac{\frac{Y}{X_2} - \frac{Y}{X_1}}{1 + \frac{Y^2}{X_1 X_2}} = \frac{Y(X_1 - X_2)}{X_1 X_2 + Y^2}.$$

Annulons la dérivée prise par rapport à la variable y; il vient

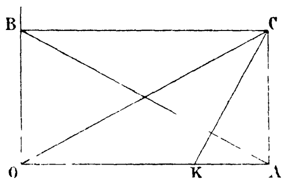
$$Y^2 = X_1 X_2.$$

Ainsi l'angle variable est maximum lorsque JL est moyenne géométrique entre JO et JI. La position correspondante L_1 du point L sera donc à la rencontre de la droite Δ et du cercle décrit sur OI′ pour diamètre, I′ étant le symétrique du point I par rapport à Δ.

9. Nous allons appliquer ce résultat à la recherche du maximum de l'écart normal et de la déviation.

Comme nous pouvons librement choisir le point I, faisons-le d'abord coïncider avec le centre de courbure K répondant au sommet A (*fig.* 6), point qui s'obtient en

Fig. 6.



menant CK perpendiculaire à AB. D'après ce que nous avons vu au n° 4, la droite Δ correspondante n'est autre que la tangente AC au sommet A.

Or, puisque

$$OA = a, \qquad AK = \frac{b^2}{a}, \qquad AC = b,$$

on a

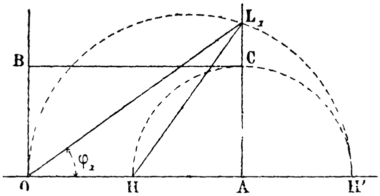
$$\overline{AC}^2 = AO.AK;$$

donc, d'après le lemme, l'écart normal maximum est donné par OCK. D'ailleurs le diamètre du point M correspondant étant OC, on retrouve le résultat obtenu au n° 2.

10. Faisons maintenant coïncider le point I avec le point H d'abscisse $a-b$. La droite Δ' se confond alors avec la tangente AC au sommet A (n° 4).

Si donc nous prenons $AH' = AH = b$, et que le cercle décrit sur OH' comme diamètre coupe AC en L_1, l'angle

Fig. 7.



OL_1H est, en vertu du lemme précédent, égal à la déviation maxima.

L'angle AOL_1 donne l'anomalie excentrique correspondante φ_1, et l'on a

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{AL_1}{OA} = \frac{\sqrt{ab}}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

On retombe sur le résultat que nous avons déjà obtenu par une autre voie dans l'étude citée au début de cette Note.

11. *Remarque.* — L'anomalie excentrique correspondant au maximum de la déviation étant égale à $\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{b}{a}}$, et l'anomalie excentrique correspondant au maximum de l'écart normal étant égale à $\frac{\pi}{4}$, on voit que ces deux maxima ne coïncident qu'à la limite, lorsque l'ellipse devient un cercle, c'est-à-dire lorsqu'à la vérité il n'y a plus ni déviation, ni écart normal.

En somme, si l'on part du sommet du grand axe pour aller à celui du petit, on voit que le maximum de la déviation se produit avant celui de l'écart normal et que ces deux maxima sont d'autant plus rapprochés que l'ellipse considérée se rapproche davantage du cercle, c'est-à-dire que le rapport de ses axes est plus voisin de l'unité.

12. Nous allons maintenant démontrer le théorème auquel nous avons fait allusion au nº 3, et qui peut s'énoncer ainsi :

Le lieu du point de rencontre de la normale à l'ellipse et du diamètre correspondant du cercle principal est le cercle de rayon $a+b$ concentrique à l'ellipse.

L'équation de la normale MN (*fig.* 1) est, en fonction de l'anomalie excentrique,

$$b\cos\varphi(y - b\sin\varphi) = a\sin\varphi(x - a\cos\varphi);$$

celle du diamètre correspondant OM' du cercle principal,

$$y\cos\varphi = x\sin\varphi.$$

Tirant $\cos\varphi$ de la seconde équation pour porter sa valeur en fonction de $\sin\varphi$ dans la première, on tire de celle-ci

$$\sin\varphi = \frac{y}{a+b};$$

dès lors,

$$\cos\varphi = \frac{x}{a+b},$$

et l'équation du lieu du point φ est

$$\frac{y^2}{(a+b)^2} + \frac{x^2}{(a+b)^2} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 = (a+b)^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On déduit de là cette construction fort simple de la normale à l'ellipse :

Prenant sur le cercle principal le point M′ *correspondant au point* M, *on prolonge le rayon* OM′ *d'une longueur* M′Q *égale au petit axe de l'ellipse. La droite* QM *est normale à l'ellipse en* M.

Nota. — Dans un Mémoire que M. R. Guimaraes vient de publier à part sous le titre de *Semelhança e rectificaçao dos arcos ellipticos*, je remarque les élégantes propriétés que voici des points définis par l'anomalie excentrique φ, telle que $\tang^2\varphi = \frac{b}{a}$, qui sont les points que j'ai appelés *de déviation maxima :*

I. *La différence des arcs déterminés sur un quadrant d'ellipse par le point de déviation maxima situé sur ce quadrant est égale à la différence des demi-axes de l'ellipse.*

II. *Le point de déviation maxima sur un quadrant d'ellipse est le point de contact du cercle inscrit dans le triangle mixtiligne formé par ce quadrant et les tangentes en ces extrémités.*

Cette propriété se déduit immédiatement du théorème de Chasles sur la différence de deux arcs d'ellipse, tels que les tangentes en leurs extrémités forment un quadrilatère circonscriptible au cercle.