

**Solution de la question proposée
pour l'admission à l'École normale
supérieure en 1887**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 295-302

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__295_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1887;**

PAR UN ABONNÉ.

Soit P le point du cylindroïde dont les coordonnées sont α, β, γ . Les équations de la normale en ce point sont

$$\frac{x - \alpha}{\alpha\gamma - m\alpha} = \frac{y - \beta}{\beta\gamma + m\beta} = \frac{z - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2},$$

et, comme cette normale passe par le point M(x', y', z'), on a

$$(1) \quad \frac{x' - \alpha}{\alpha\gamma - m\alpha} = \frac{y' - \beta}{\beta\gamma + m\beta} = \frac{z' - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ces relations, dans lesquelles on peut supposer α, β, γ coordonnées courantes, représente une courbe passant par les pieds des normales menées du point M à la surface donnée.

On a, en outre, en remarquant que le point P est sur la surface,

$$(2) \quad \gamma(\alpha^2 + \beta^2) - m(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Les pieds des normales demandées s'obtiendraient donc en résolvant les équation (1) et (2) par rapport à α, β, γ . Mais ces équations, vu leur forme compliquée, ne peuvent être résolues par les procédés élémentaires de l'Algèbre.

Nous allons alors nous proposer de former : 1^o l'équation qui a pour racines les valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$; 2^o l'équation qui a pour racines les valeurs de γ .

Équation en $\frac{\beta}{\alpha}$. — 1^o Les relations (1) donnent, en considérant les deux premiers rapports,

$$\beta\gamma x' - \alpha\beta\gamma + m\beta x' - m\alpha\beta = \alpha\gamma y' - m\alpha y' - \alpha\beta\gamma + m\alpha\beta$$

ou

$$2m\alpha\beta - m(\alpha y' + \beta x') + \gamma(\alpha y' - \beta x') = 0.$$

Divisant tous les termes par α et posant $\frac{\beta}{\alpha} = \mu$, il vient

$$2m\mu\alpha - m(y' + \mu x') + \gamma(y' - \mu x') = 0.$$

D'autre part, la relation (2) donne

$$\gamma(1 + \mu^2) = m(1 - \mu^2)$$

ou

$$\gamma = m \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \right).$$

Remplaçant γ par sa valeur dans l'égalité précédente et divisant tous les termes par m , il vient

$$2\mu\alpha - (y' + \mu x') + \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \right) (y' - \mu x') = 0;$$

d'où

$$\alpha = \frac{(1 + \mu^2)(y' + \mu x') - (1 - \mu^2)(y' - \mu x')}{2\mu(1 + \mu^2)}$$

ou, en simplifiant,

$$\alpha = \frac{x' + \mu y'}{1 + \mu^2}.$$

Considérons maintenant le premier et le troisième rapport des relations (1); ils donnent

$$(x' - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = (z' - \gamma)(\alpha\gamma - m\alpha),$$

ou, en divisant tous les termes par α^2 et remplaçant $\frac{\beta}{\alpha}$

par μ ,

$$(x' - \alpha)(1 + \mu^2) = (z' - \gamma) \frac{\gamma - m}{\alpha}.$$

Si, dans cette égalité, nous remplaçons les quantités α et γ par leurs valeurs trouvées tout à l'heure, nous aurons une équation qui ne contiendra plus que μ comme inconnue et qui ne sera autre chose que l'équation demandé. On obtient ainsi

$$(1 + \mu^2)(x' + \mu y')(\mu x' - y') + 2m\mu[z' - m + \mu^2(z' + m)] = 0$$

ou, en effectuant les calculs et ordonnant par rapport à μ ,

$$(I) \quad \begin{cases} \mu^4 x' y' + \mu^3 [x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m)] \\ + \mu [x'^2 - y'^2 + 2m(z' - m)] - x' y' = 0. \end{cases}$$

Telle est l'équation du quatrième degré qui donne les valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$.

Équation en γ . — Pour avoir l'équation en γ , il n'y a qu'à remplacer dans l'équation précédente la quantité μ par sa valeur en fonction de γ .

Or, de la relation $\gamma = m \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \right)$, on tire

$$\mu = \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}};$$

on a donc, en remplaçant μ par sa valeur dans l'équation (I),

$$\begin{aligned} \left(\frac{m - \gamma}{m + \gamma} \right)^2 x' y' + \frac{m - \gamma}{m + \gamma} \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}} [x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m)] \\ + \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}} [x'^2 - y'^2 + 2m(z' - m)] - x' y' = 0. \end{aligned}$$

Faisant passer les termes rationnels dans le second membre et les termes irrationnels dans le premier, il

vient

$$(m^2 - \gamma^2) \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}} [x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m)] \\ + (m + \gamma)^2 \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}} [x'^2 - y'^2 + 2(z' - m)] = 4m\gamma x'y'$$

ou, en mettant $(m + \gamma) \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}}$ en facteur dans le premier membre,

$$(m + \gamma) \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}} \left\{ (m - \gamma) [x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m)] \right. \\ \left. + (m + \gamma) [x'^2 - y'^2 + 2m(z' - m)] \right\} = 4m\gamma x'y',$$

ou encore, en effectuant entre crochets et divisant par $2m$,

$$\sqrt{m^2 - \gamma^2} [x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma)] = 2\gamma x'y',$$

ou enfin, en élevant au carré et ordonnant par rapport à γ ,

$$(II) \quad \begin{cases} 4m^2\gamma^4 - 4m(x'^2 - y'^2 + 2mz')\gamma^3 \\ + [(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2 + 4x'y'^2 - 4m^4]\gamma^2 \\ + 4m^3(x'^2 - y'^2 + 2mz')\gamma - m^2(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2 = 0. \end{cases}$$

C'est la seconde équation demandée.

Si l'on savait résoudre les équations (I) et (II), on déduirait facilement des racines de ces équations les valeurs des coordonnées α , β , γ . En effet, si l'on connaissait μ , par exemple, les coordonnées α , β , γ seraient données par les formules

$$\alpha = \frac{x' + \mu y'}{1 + \mu^2}, \quad \beta = \frac{\mu(x' + \mu y')}{1 + \mu^2}, \quad \gamma = m \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \right).$$

De même, si l'on connaissait γ , on aurait μ par la formule

$$\mu = \sqrt{\frac{m - \gamma}{m + \gamma}},$$

et l'on en déduirait α et β .

2° Pour que l'équation (I) soit réciproque, il faut que les coefficients de deux termes quelconques situés à égale distance des extrêmes soient égaux et de signes contraires, c'est-à-dire que l'on ait

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m) + x'^2 - y'^2 + 2m(z' - m) = 0$$

ou

$$x'^2 - y'^2 + 2mz' = 0,$$

équation qui exprime que le point M doit se trouver sur un *paraboloïde hyperbolique* ayant pour plans principaux le plan des xz et le plan des yz .

Supposons cette condition remplie et cherchons les coordonnées des pieds des normales menées du point M au cylindroïde. L'équation (I) prend la forme

$$\mu^4 x' y' + 2m^2 \mu^3 - 2m^2 \mu - x' y' = 0,$$

ou, en groupant les termes et mettant $(\mu^2 - 1)$ en facteur commun,

$$(\mu^2 - 1)(\mu^2 x' y' + 2m^2 \mu + x' y') = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\mu^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu^2 x' y' + 2m^2 \mu + x' y' = 0.$$

La première équation donne

$$\mu' = 1 \quad \text{et} \quad \mu'' = -1,$$

et la seconde

$$\mu''' = \frac{-m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2}}{x' y'}$$

et

$$\mu^{iv} = \frac{-m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2}}{x' y'}.$$

Connaissant les valeurs de μ , on trouve facilement

celles de α , β , γ , qui sont

$$\alpha' = \frac{x' + y'}{2}, \quad \beta' = \frac{x' - y'}{2}, \quad \gamma' = 0,$$

$$\alpha'' = \frac{x' - y'}{2}, \quad \beta'' = -\frac{x' - y'}{2}, \quad \gamma'' = 0.$$

$$\alpha''' = \frac{x' y'^2 (x'^2 - m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2})}{2 m^2 (m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2})},$$

$$\beta''' = -\frac{y' (x'^2 - m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2})}{2 m^2},$$

$$\gamma''' = \frac{\sqrt{m^4 - x'^2 y'^2}}{m},$$

$$\alpha^{iv} = \frac{x' y'^2 (x'^2 - m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2})}{2 m^2 (m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2})},$$

$$\beta^{iv} = -\frac{y' (x'^2 - m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2})}{2 m^2},$$

$$\gamma^{iv} = -\frac{\sqrt{m^4 - x'^2 y'^2}}{m}.$$

3° Supposons que l'équation (II) ait une racine double égale à z' . Les relations entre les coefficients et les racines sont alors

$$\gamma' + \gamma'' + 2 z' = \frac{x'^2 - y'^2 + 2 m z'}{m},$$

$$\gamma' \gamma'' + (\gamma' + \gamma'') z' + z'^2 = \frac{(x'^2 - y'^2 + 2 m z')^2 + 4 x'^2 y'^2 - 4 m^4}{4 m^2},$$

$$2 \gamma' \gamma'' z' + (\gamma' + \gamma'') z'^2 = -m (x'^2 - y'^2 + 2 m z'),$$

$$\gamma' \gamma'' z'^2 = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2 m z')^2}{4}.$$

De la première et de la quatrième, on tire

$$\gamma' + \gamma'' = \frac{x'^2 - y'^2}{m},$$

$$\gamma' \gamma'' = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2 m z')^2}{4 z'^2},$$

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$\frac{(x'^2 - y'^2)z'^2}{m} - \frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{2z'} = -m(x'^2 - y'^2 + 2mz'),$$

ou, en chassant les dénominateurs et simplifiant,

$$2(x'^2 - y'^2)z'^3 - m(x'^2 - y'^2 + 2mz')(x'^2 - y'^2) = 0,$$

équation qui se décompose en

$$x'^2 - y'^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2z'^3 - m(x'^2 - y'^2 + 2mz') = 0.$$

La première équation représente les plans bissecteurs des angles dièdres $xozy$ et $xozy'$, et la seconde une surface du troisième degré rencontrant chacun des plans $z = 0$, $z = m$ et $z = -m$ suivant deux droites situées dans les plans bissecteurs dont nous venons de parler.

Supposons le point M situé sur l'une des deux surfaces précédentes. L'équation (II) admet alors la racine double z' et les deux autres racines satisfont aux relations

$$\gamma' + \gamma'' = \frac{x'^2 - y'^2}{m} \quad \text{et} \quad \gamma' \gamma'' = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{4z'^2}.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\frac{(x'^2 - y'^2)^2}{m^2} + \frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{z'^2} > 0,$$

condition qui est toujours satisfaite, puisque le premier membre est une somme de deux carrés.

4^o Pour savoir ce que représente l'équation (II) quand on y regarde γ comme une constante et x' , y' , z' comme les coordonnées d'un point variable, nous n'avons qu'à ordonner cette équation par rapport à

$$(x'^2 - y'^2 + 2mz')$$

et à résoudre l'équation du second degré obtenue. On a ainsi

$$\begin{aligned} & (\gamma^2 - m^2)(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2 \\ & - 4m\gamma(\gamma^2 - m^2)(x'^2 - y'^2 + 2mz') \\ & + 4m^2\gamma^2(\gamma^2 - m^2) + 4\gamma^2x'^2y'^2 = 0; \end{aligned}$$

d'où

$$x'^2 - y'^2 + 2mz' = \frac{2m\gamma(\gamma^2 - m^2) \pm 2\gamma x' y' \sqrt{\gamma^2 - m^2}}{\gamma^2 - m^2},$$

ou, en séparant les racines et simplifiant,

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma) + \frac{2\gamma x' y'}{\sqrt{\gamma^2 - m^2}} = 0,$$

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma) - \frac{2\gamma x' y'}{\sqrt{\gamma^2 - m^2}} = 0,$$

équations qui représentent deux *paraboloïdes hyperboliques*.

La même question a été résolue, d'une manière analogue, par M. Clapier, étudiant à la Faculté des Sciences de Montpellier, et par M. Barisien.