GENTY

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 350-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__350_1>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. GENTY.

Soit une droite de longueur constante dont les extrémités A_1 et A_2 se déplacent sur deux surfaces données (S_1) et (S_2), de telle manière que les normales à ces surfaces menées aux points A_1 et A_2 respectivement se rencontrent en un point N. La normale au lieu décrit par un point quelconque A de la droite $A_1 A_2$ passe aussi par le point N.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des extrémités de la droite mobile dans l'une de ses positions, et

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1\, dx_1 + B_1\, dy_1 + C_1\, dz_1 = 0, \\ A_2\, dx_2 + B_2\, dy_2 + C_2\, dz_2 = 0 \end{cases}$$

les équations différentielles des surfaces (S_1) et (S_2).

On aura

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{const.};$$

d'où

$$(2)\quad \begin{cases} (x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) \\ \quad + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + (z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2) = 0. \end{cases}$$

Cela posé, les normales aux points A_1 et A_2 auront pour équations

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1},$$

$$\frac{x - x_2}{A_2} = \frac{y - y_2}{B_2} = \frac{z - z_2}{C_2}.$$

La condition qui exprime que ces deux normales se rencontrent est

$$L_1 = L_2,$$

en posant, pour abréger,

$$L_1 = \begin{vmatrix} x_1 & A_1 & A_2 \\ y_1 & B_1 & B_2 \\ z_1 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad L_2 = \begin{vmatrix} x_2 & A_1 & A_2 \\ y_2 & B_1 & B_2 \\ z_2 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Et, si l'on pose de même

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & A_1 \\ y_1 & y_2 & B_1 \\ z_1 & z_2 & C_1 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & A_2 \\ y_1 & y_2 & B_2 \\ z_1 & z_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

on voit sans peine que le point de rencontre N des deux normales a pour coordonnées

$$x = x_1 + \frac{M_2}{L_2} A_1 = x_2 + \frac{M_1}{L_1} A_2,$$

$$y = y_1 + \frac{M_2}{L_2} B_1 = y_2 + \frac{M_1}{L_1} B_2,$$

$$z = z_1 + \frac{M_2}{L_2} C_1 = z_2 + \frac{M_1}{L_1} C_2.$$

Soient maintenant

$$\xi = \frac{lx_1 + mx_2}{l + m}, \qquad \eta = \frac{ly_1 + my_2}{l + m}, \qquad \zeta = \frac{lz_1 + mz_2}{l + m}$$

les coordonnées du point A, $\frac{l}{m}$ étant un rapport constant.

La relation à démontrer est

$$(x-\xi)\,d\xi+(y-\eta)\,d\eta+(z-\zeta)\,d\zeta=0,$$

ou

$$\sum(x-\xi)\,d\xi=0,$$

ou

$$\sum(x-\xi)(l\,dx_1+m\,dx_2)=0,$$

$$\sum\left[l\left(x_1+\frac{M_2}{L_2}A_1-\frac{lx_1+mx_2}{l+m}\right)dx_1\right.$$
$$\left.+m\left(x_1+\frac{M_1}{L_1}A_2-\frac{lx_1+mx_2}{l+m}\right)dx_2\right]=0,$$

ou, en développant et tenant compte des équations (1),

$$\sum\left(lx_1\,dx_1+mx_2\,dx_2-\frac{l^2x_1\,dx_1+lmx_2\,dx_1+lmx_1\,dx_2+m^2x_2\,dx_2}{l+m}\right)=0,$$

ou enfin

$$\sum(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2-x_2\,dx_1-x_1\,dx_2)=0,$$

équation identique à la relation (2).