Cl. Servais

Sur la courbure dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 369-374

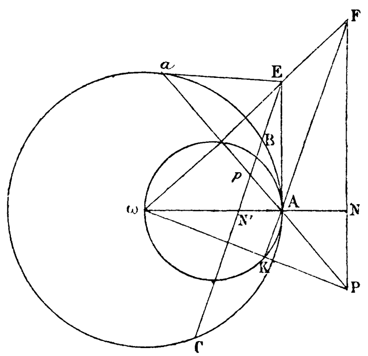
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__369_0>

SUR LA COURBURE DANS LES CONIQUES;

PAR M. CL. SERVAIS,
Répétiteur à l'Université de Gand.

1. Les propriétés dont nous nous occupons dans la présente Note se déduisent d'un cas particulier de la transformation de Hirst; la conique fondamentale est un cercle S et le pôle un point A de ce cercle. Désignons par S' le cercle décrit sur ωA comme diamètre, ω étant le centre de S; S' correspond à la droite à l'infini du

Fig. 1.



plan. La transformée d'une droite (D) est une conique (D') tangente à S' au point A. Ce sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la droite (D) rencontre S' en deux points imaginaires, réels ou coïncidents. La droite (D) n'ayant qu'un point à l'infini, sa transformée (D') n'aura avec S' qu'un seul point commun K autre que A. Donc S' est le cercle osculateur à la conique au point A, et la corde de courbure AK est parallèle à (D). Il résulte de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *En un point* A *d'une conique on décrit un cercle tangent, dont le rayon est égal au diamètre du cercle osculateur en ce point, et l'on mène différentes sécantes rencontrant la conique et le cercle en des points* B *et* C. *Le lieu du point* D, *tel que*

$$(ABCD) = -1,$$

est une droite parallèle à la corde de courbure.

Considérons deux sécantes ABCD, AB′C′D′; on a

$$(ABCD) = (AB'C'D') = -1$$

Le point A étant commun aux deux groupes de points, les droites BB′, CC′, DD′ sont concourantes. A la limite, on voit que les tangentes aux points B et C à la conique et au cercle se coupent sur la droite (D).

2. Soient B et C les points d'intersection de (D′) et de S; P le pôle de BC par rapport à S; p et a les points de rencontre de la droite AP avec (D) et S; on a

$$(AaPp) = -1$$

donc P est un point de la conique. Les tangentes à S aux points A et a se coupant sur BC, il en sera de même des tangentes à la conique aux points A et P (n° 1); les droites AP et BC sont donc conjuguées par rapport à la conique. De là :

THÉORÈME II. — *Si, en un point* A *d'une conique, on décrit un cercle tangent dont le rayon soit égal au diamètre du cercle osculateur, le pôle* P *par rapport à ce cercle de la corde interceptée* BC *est situé sur la conique; les deux droites* AP *et* BC *sont conjuguées par rapport à la conique.*

3. Représentons par N' le point d'intersection des droites BC et Aω, et par N son correspondant; ce point N sera le point où la normale au point A rencontre la conique. La polaire du point N' par rapport à S, devant passer par les points P et N, PN est perpendiculaire sur AN. P étant le pôle de BC, Pω est perpendiculaire au point K sur la corde de courbure AK. Donc :

THÉORÈME III. — *La circonférence décrite sur* PA *comme diamètre rencontre la conique en deux points* N *et* K, *dont l'un est l'extrémité de la normale et l'autre l'extrémité de la corde de courbure au point* A; *les deux droites* PK *et* AN *se coupent au point* ω, *diamétralement opposé à* A *sur le cercle de courbure à la conique en ce point.*

Les droites PA et BC étant conjuguées par rapport à la conique, le faisceau N(PABC) est harmonique; mai NP est perpendiculaire à NA : donc cette dernière droite est la bissectrice de l'angle BNC.

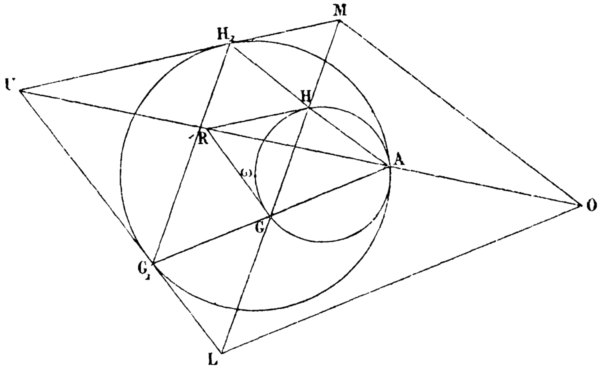
4. Soit F le point de rencontre de PN et AK; ωF sera la troisième hauteur du triangle PAF et elle passera par E. Donc :

THÉORÈME IV. — *Le pôle de* PA, *le point d'intersection des droites* PN *et* AK *et le point* ω, *diamétralement opposé au point* A *sur le cercle de courbure en ce point, sont sur une droite perpendiculaire à* PA.

Ces propriétés donnent une construction nouvelle du centre de courbure en un point A d'une conique. On détermine successivement les points N, P, E, ω; le milieu de Aω est le point cherché. Si la conique est donnée par cinq points, la construction est linéaire en faisant usage du théorème de Pascal.

5. Supposons que la droite (D) rencontre le cercle S' en deux points G et H; dans ce cas, la conique est une hyperbole. Les droites AG et AH rencontrent le cercle S aux points G_1 et H_1. Menons les tangentes à S en ces

Fig. 2.



points et appelons L et M les points d'intersection de ces tangentes avec (D). Les parallèles LO et MO menées de L et M respectivement à AG et AH sont les asymptotes de l'hyperbole (n° 1), et O est le centre de la courbe. Les triangles AG_1H_1, LOM, ayant leurs côtés parallèles deux à deux, les droites AO, G_1L, H_1M se coupent en un même point U. Soit R le pôle de GH par rapport à S'; les droites RU, G_1, G, H_1 H se coupent en un même point A; ou bien R est sur le diamètre OA. Donc :

Théorème V. — *Si par un point* A *de l'hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes, la corde interceptée dans le cercle de courbure est parallèle à la corde de courbure; son pôle par rapport au cercle de courbure est situé sur le diamètre de l'hyperbole correspondant au point* A.

On peut remplacer le cercle de courbure par un cercle quelconque tangent à la conique au point A.

6. Si la droite (D) passe par ω, la normale en A est parallèle à une asymptote et (D) est perpendiculaire à l'autre; comme BC passe par ω, on a $BC = 2A\omega$. Donc :

THÉORÈME VI. — *Soit* A *le point d'une hyperbole où la normale est parallèle à une asymptote; si, par le point diamétralement opposé à* A *sur le cercle de courbure en ce point, on mène une perpendiculaire à l'autre asymptote, le segment intercepté par l'hyperbole sur cette droite est double du diamètre du cercle osculateur au point* A.

Ce théorème suppose que l'angle des asymptotes, qui contient les diamètres imaginaires, soit obtus.

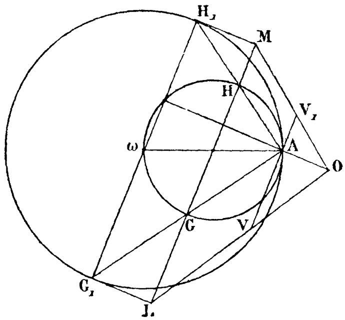
7. Si (D) passe par le centre de S', l'hyperbole (D') est équilatère, et la corde interceptée par le cercle de courbure sur le diamètre OA est double de OA. *La puissance du centre* O *d'une hyperbole équilatère, par rapport au cercle de courbure en un point* A *de cette courbe, est égale à* $3\overline{AO}^2$.

On voit aussi que la projection du centre de courbure sur le diamètre décrit une hyperbole équilatère homothétique à l'hyperbole donnée, le rapport d'homothétie étant égal à 2. Or la projetante est la droite (D); donc *l'enveloppe de la droite* (D) *est l'antipodaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre.*

La corde de courbure au point A est perpendiculaire à OA; soient V et V_1 les points où elle rencontre les asymptotes; ces points sont les milieux de OM et

OL : donc $VV_1 = GH$ et les droites HV_1 et GV sont tangentes à S'. Donc :

Fig. 3.



Théorème VII. — *En un point* A *d'une hyperbole équilatère, le segment intercepté par les asymptotes sur la corde de courbure est égal au diamètre du cercle osculateur; les parallèles, menées par les extrémités de ce segment, au diamètre passant par* A *sont tangentes à ce cercle.*

Ce théorème donne une construction simple du cercle de courbure en un point de l'hyperbole équilatère donnée par ses asymptotes.