Worontzoff

# Sur un théorème de M. Weill

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 7 (1888), p. 97-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__97_1>

## SUR UN THEORÈME DE M. WEILL;

Par M. WORONTZOFF, à Minsk (Russie).

En se fondant sur la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions partielles, M. Weill donne le théorème suivant :

$$C_h^1 - 3C_h^3 + 3^2 C_h^5 - \ldots = \pm 2^{h-1},$$

où $C_h^n$ représente le nombre des combinaisons de $h$ objets $n$ à $n$ et $h = 3m+1, 3m+2$ (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1887, p. 83). Cette formule curieuse peut être établie facilement par les procédés d'Algèbre élémentaire.

En effet, comme

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3} = 1, \qquad \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m} = 1,$$

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

on a

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m} \\ &= \frac{(-1)^{3m}}{2^{3m}}\Big[1 - i\sqrt{3}\,C_{3m}^1 - 3C_{3m}^2 \\ &\qquad - i(\sqrt{3})^3 C_{3m}^3 + 3^2 C_{3m}^4 - i(\sqrt{3})^5 C_{3m}^5 - \ldots\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+1} \\ &= \frac{(-1)^{3m+1}}{2^{3m+1}}\Big[1 - i\sqrt{3}\,C_{3m+1}^1 - 3C_{3m+1}^2 \\ &\qquad + i(\sqrt{3})^3 C_{3m+1}^3 \\ &\qquad + 3^2 C_{3m+1}^4 - i(\sqrt{3})^5 C_{3m+1}^5 - \ldots\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2} \\ &= \frac{(-1)^{3m}}{2^{3m+2}}\Big[1 - i\sqrt{3}\,C_{3m+2}^1 - 3C_{3m+2}^2 \\ &\qquad - i(\sqrt{3})^3 C_{3m+2}^3 + 3^2 C_{3m+2}^4 \\ &\qquad - i(\sqrt{3})^5 C_{3m+2}^5 - \ldots\Big] \end{aligned}$$

et, par suite,

$$
\begin{aligned}
&1 - 3\,C_{3m}^{2} + 3^2\,C_{3m}^{4} - \ldots = (-2)^{3m},\\
&1 - 3\,C_{3m+1}^{2} + 3^2\,C_{3m+1}^{4} - \ldots = (-2)^{3m},\\
&1 - 3\,C_{3m+2}^{2} + 3^2\,C_{3m+2}^{4} - \ldots = (-2)^{3m+1},\\
&C_{3m}^{1} - 3\,C_{3m}^{3} + 3^2\,C_{3m}^{5} - \ldots = 0,\\
&C_{3m+1}^{1} - 3\,C_{3m+1}^{3} + 3^2\,C_{3m+1}^{5} - \ldots = (-2)^{3m},\\
&C_{3m+2}^{1} - 3\,C_{3m+2}^{3} + 3^2\,C_{3m+2}^{5} - \ldots = (-1)^{3m}2^{3m+1}.
\end{aligned}
$$

Toutes ces égalités peuvent aussi s'obtenir au moyen des formules trigonométriques bien connues

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{2k\pi}{p} = \cos^n\frac{2\pi}{p} - C_n^2 \sin^2\frac{2\pi}{p}\cos^{n-2}\frac{2\pi}{p}&\\
+ C_n^4 \sin^4\frac{2\pi}{p}\cos^{n-4}\frac{2\pi}{p} - \ldots&,\\
\sin\frac{2k\pi}{p} = C_n^1 \sin\frac{2\pi}{p}\cos^{n-1}\frac{2\pi}{p} - C_n^3 \sin^3\frac{2\pi}{p}\cos^{n-3}\frac{2\pi}{p}&\\
+ C_n^5 \sin^5\frac{2\pi}{p}\cos^{n-5}\frac{2\pi}{p} - \ldots&,
\end{aligned}
$$

où $n = pm + k$.