De Saint-Germain

Note sur la question de mécanique proposée au concours d'agrégation en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 13-22
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__13_1>

NOTE SUR LA QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1887;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Rouché.

Puisque vous avez bien voulu me dire que je pourrais être utile à quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* en leur indiquant une solution du problème de Mécanique proposé à l'Agrégation en 1887, je vais montrer qu'on peut, par la voie la plus naturelle, arriver à cette solution et la pousser aussi loin que le permettent d'ordinaire les problèmes sur le mouvement des systèmes matériels.

Soit S un cône droit, homogène, dont le sommet O est immobile et dont chaque élément m est attiré vers un point fixe F par une force égale au produit de sa masse par sa distance au point F et par une constante ω^2; la hauteur OH du cône est égale à a, le rayon de base à $2a$, OF à $\frac{8}{5}a$; enfin, à l'instant initial, l'angle FOH est droit et S animé d'une vitesse de rotation $\omega\sqrt{2}$ autour de la bissectrice de cet angle. On demande de déterminer le mouvement ultérieur du cône et la réaction du point fixe; OM étant l'axe représentatif de la rotation instantanée, montrer que le point M décrit, dans le cône et dans l'espace, deux herpolhodies et chercher les quadriques correspondantes; indiquer la position relative des cônes lieux de l'axe instantané dans le solide S et dans l'espace.

Prenons trois axes rectangulaires fixes, OX_1, OY_1, OZ_1, dont le dernier est dirigé suivant OF, et trois axes OX, OY, OZ liés invariablement au cône, OZ étant dirigé suivant OH. Nous chercherons d'abord les moments d'inertie A et C de S par rapport à OX ou OY et par rapport à OZ : ε étant la densité du cône, μ sa masse, on trouve bien aisément

$$A = \int_0^a 4\pi\varepsilon z^2 \left(\frac{4z^2}{4} + z^2\right) dz = \frac{8}{5}\pi\varepsilon a^5 = \frac{6}{5}\mu a^2,$$

$$C = \int_0^a 4\pi\varepsilon z^2 \frac{4z^2}{2}\, dz = A :$$

cette égalité simplifiera beaucoup les résultats que nous devons obtenir.

D'autre part, les attractions qui s'exercent suivant la loi donnée ont, comme on sait, une résultante R appliquée au centre de gravité G du cône et égale à $\mu\omega^2 GF$. Nous définirons la position du solide à l'aide des trois angles d'Euler θ, ψ, φ. Le couple qu'on introduit en transportant R parallèlement à elle-même au point O a son axe K dirigé dans le plan des $x_1 y_1$, faisant avec OX_1 l'angle $180^\circ + \psi$ et égal à

$$\mu\omega^2 GF \times OF \sin GFO$$
$$= \mu\omega^2 OF \times OG \sin GOF = \frac{6}{5}\mu\omega^2 a^2 \sin\theta.$$

Il est facile de trouver les projections de l'axe K sur les axes mobiles et de former les équations d'Euler : en les divisant par $\frac{6}{5}\mu\omega^2 a^2$, elles deviennent

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 \sin\theta \cos\varphi, \qquad \frac{dq}{dt} = \omega^2 \sin\theta \sin\varphi, \qquad \frac{dr}{dt} = 0.$$

La dernière donne immédiatement, eu égard aux conditions initiales,

$$(2) \qquad r = \omega.$$

Pour obtenir d'autres intégrales, je rappelle les relations qui existent entre p, q, r et les dérivées des angles d'Euler,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, éliminons ω^2 entre les deux premières équations (1) :

$$\sin\varphi \frac{dp}{dt} + \cos\varphi \frac{dq}{dt} = 0;$$

multiplions par $\sin\theta\, dt$ et intégrons par parties; nous aurons

$$\begin{aligned}&\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\\ &\quad -\int (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cos\theta\, d\theta\\ &\quad -\int (p\cos\varphi - q\sin\varphi)\sin\theta\, d\varphi = \text{const.}\end{aligned}$$

ou, en remplaçant p et q par leurs valeurs (3),

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} - \int \sin\theta\left(\cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right) d\theta = \text{const.},$$

le coefficient de $\sin\theta\, d\theta$ est égal à r ou à ω et l'on a, en intégrant,

$$(4)\qquad \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} + \omega\cos\theta = \omega.$$

Ajoutons enfin les deux premières équations (1) après les avoir multipliées par $2p$ et $2q$

$$\begin{aligned}2p\frac{dp}{dt} + 2q\frac{dq}{dt} &= -2\omega^2\sin\theta(p\cos\varphi - q\sin\varphi)\\ &= -2\omega^2\sin\theta \frac{d\theta}{dt};\end{aligned}$$

l'intégrale est, en tenant compte des données initiales,

$$(5)\qquad p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} = \omega^2(1 + 2\cos\theta).$$

On eût pu écrire directement les intégrales (2), (4) et (5); les deux premières expriment que les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement sur OZ et sur OZ_1 sont constantes; et, en effet, d'après une remarque de M. Resal, la vitesse de l'extrémité de cet axe est représentée par K, perpendiculaire sur OZ et sur OZ_1; l'intégrale (5) est celle des forces vives, le travail de R étant, comme on sait,

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2\left[\overline{(GF)}_0^2 - \overline{GF}^2\right] = \frac{6}{5}\mu a^2\omega^2\cos\theta.$$

De l'équation (4) nous tirerons

$$(6)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1+\cos\theta},$$

et, en substituant cette valeur dans (5), nous aurons

$$(7)\qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2\,\frac{\cos\theta(2+\cos\theta)}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

Si l'on pose $\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{u}{\sqrt{2}}$, on peut tirer de cette équation

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cos\,am}\left(\omega t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\qquad\left(\operatorname{mod}\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

mais, sans recourir aux fonctions elliptiques, on peut conclure des équations (6) et (7) que θ décroît d'abord depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ pour revenir à $\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite, tandis que ψ croît constamment et sans limite. Sur une sphère décrite du point O comme centre avec a pour rayon, le lieu du point H sera une courbe formée, en général, d'une infinité de boucles tangentes au grand cercle situé dans le plan des x_1y_1 et s'entrecoupant au point qui est sur la partie positive de OZ_1.

L'équation (2) et la dernière des équations (3) donnent

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1+\cos\theta} = \frac{d\psi}{dt};$$

on peut choisir les axes de sorte que φ et ψ s'annulent pour $t = 0$; ces deux angles seront constamment égaux, ce qui achève de nous faire connaître le mouvement du cône.

Il s'agit de calculer la réaction E exercée par le point fixe. Soit J l'accélération du centre de gravité; les forces extérieures R et E ayant pour résultante $J\mu$, on en pourra conclure la projection de E sur un axe quelconque. Je chercherai les composantes de E : 1° suivant la trace OU du plan OXY sur OX_1Y_1 ; 2° suivant la droite OV perpendiculaire à OU dans le plan des xy; 3° suivant OZ; c'est celles qu'on calculera le plus facilement si l'on se rappelle les formules de Rivals qui expriment les composantes de l'accélération d'un point x, y, z d'un solide, savoir :

$$J_x = p(px + qy + rz) - \omega^2 x + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt},$$

$$J_y = q(px + qy + rz) - \omega^2 y + x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt},$$

$$J_z = r(px + qy + rz) - \omega^2 z + y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}.$$

Remplaçons x, y, z par les coordonnées 0, 0, $\frac{3}{4}a$ du point G, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ par leurs valeurs (1), p, q, r par leurs valeurs (3) et supposons $\varphi = 0$: nous aurons les projections de l'accélération du point G sur OU, OV, OZ :

$$J_u = \frac{3}{4}a\omega\frac{d\theta}{dt},$$

$$J_v = \frac{3}{4}a\omega\sin\theta\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\right),$$

$$J_z = -\frac{3}{4}a\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}\right).$$

Les projections de R sont

$$R_u = 0,$$
$$R_v = \frac{8}{5}\mu\omega^2 a \sin\theta,$$
$$R_z = \mu\omega^2 a\left(\frac{8}{5}\cos\theta - \frac{3}{4}\right).$$

On trouve, en définitive,

$$E_u = \mu J_u - R_u = \frac{3}{4}\mu a\omega\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{4}\mu\omega^2 a\frac{\sqrt{\cos^2\theta + 2\cos\theta}}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$
$$E_v = -\frac{\mu\omega^2 a\sin\theta}{20}\,\frac{2 + 17\cos\theta}{1 + \cos\theta},$$
$$E_z = -\frac{31}{10}\mu\omega^2 a\cos\theta,$$

et la discussion de ces formules n'offre pas de difficultés.

Considérons maintenant l'axe OM qui représente la rotation instantanée w de S et cherchons le lieu V du point M dans le cône. Les coordonnées relatives de ce point sont p, q, r : r restant égale à ω, la ligne V est située dans un plan Π qui coupe orthogonalement OZ en un point fixe P à la distance ω de l'origine; faisons $PM = \rho$, $MPM_0 = \lambda$ et cherchons comment varient ces coordonnées avec le temps. On a d'abord

$$\rho^2 = p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} = \omega^2(1 + 2\cos\theta),$$

$$\cos\theta = \frac{\rho^2 - \omega^2}{2\omega^2}. \tag{8}$$

Différentiant la valeur de ρ^2, élevant au carré et tenant compte de l'équation (7), on a

$$\rho^2\frac{d\rho^2}{dt^2} = \omega^4\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^6(1 - \cos\theta)\cos\theta(1 + 2\cos\theta)$$

ou, en remplaçant $\cos\theta$ par sa valeur (8),

$$(9) \qquad \rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = \frac{1}{4}(\rho^2 - \omega^2)(\rho^2 - 3\omega^2)(\rho^2 - 3\omega^2).$$

D'autre part, en vertu des équations (1), (3), (6), on a, pour le double de la vitesse aréolaire du point M,

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} - p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt} - \omega^2 \sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi)$$
$$- \omega^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \omega^2(1 - \cos\theta);$$

remplaçant encore $\cos\theta$ par sa valeur (8), il vient

$$(10) \qquad \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\omega(3\omega^2 - \rho^2),$$

M. Darboux a montré que la forme des équations (9) et (10) est caractéristique : elles définissent le mouvement d'un point qui décrit une herpolhodie, dans l'acception générale du mot. Soit un mouvement de Poinsot défini par les équations

$$\frac{1}{a}\frac{dp'}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) q'r', \qquad \ldots;$$

les quantités $\sum \frac{p'^2}{a}$, $\sum \frac{p'^2}{a^2}$ ont des valeurs constantes h, g^2, et la quadrique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

touche un plan fixe aux divers points de l'herpolhodie correspondante; les variations des coordonnées ρ, λ du point de contact sont données par les équations

$$\rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = h\left(\rho^2 - \frac{m}{ag^2 - h}\right)\left(\rho^2 - \frac{m}{bg^2 - h}\right)\left(\rho^2 - \frac{m}{cg^2 - h}\right),$$
$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{h\rho^2 - m}{g},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$m = -\frac{1}{hg^2}(ag^2 - h)(bg^2 - h)(cg^2 - h).$$

Il suffit d'identifier les dernières aux équations (9) et (10) pour avoir

$$h = \frac{1}{4}, \qquad g = \frac{1}{2\omega}, \qquad m = -\frac{3}{4}\omega^2,$$
$$a = -2\omega^2, \qquad b = 0, \qquad c = 2\omega^2.$$

La quadrique qui correspond à l'herpolhodie V se réduit donc à un hyperboloïde à deux nappes infiniment aplati et la polhodie est un arc de l'hyperbole équilatère représentée par l'équation $z^2 - x^2 = 2\omega^2$. L'équation de l'herpolhodie V s'obtient en éliminant dt entre les équations (9) et (10); la forme de cette équation et le fait, aisé à établir, que V n'a pas de point d'inflexion, montrent que cette courbe ressemble à une hypocycloïde dont les festons toucheraient le cercle décrit du point P comme centre avec ω pour rayon, tandis que les points de rebroussement seraient sur un cercle de rayon $\omega\sqrt{3}$. Le rayon vecteur PM tourne constamment dans le sens positif : comme il varie entre ω et $\omega\sqrt{3}$, OM varie entre $\omega\sqrt{2}$ et 2ω, ce qui limite l'arc d'hyperbole qui joue le rôle de polhodie; quand OM atteint sa limite 2ω, le plan de l'hyperbole est perpendiculaire au plan Π.

Dans l'espace, les coordonnées du point M sont égales aux composantes de la rotation w suivant les axes fixes,

$$p_1 = \cos\psi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\sin\psi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$q_1 = \sin\psi\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\cos\psi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$r_1 = \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta\frac{d\varphi}{dt}.$$

Nous avons pu faire en sorte que les φ et ψ fussent constamment égaux; on aura donc

$$p_1 = p, \qquad q_1 = -q, \qquad r_1 = r;$$

il en résulte évidemment que, dans l'espace, le point M décrit une herpolhodie V_1 égale à V, située dans un plan Π_1 qui coupe orthogonalement l'axe OZ_1 en un point P_1 tel que OP_1 soit égal à ω; seulement, le rayon vecteur P_1M tourne dans le sens négatif.

On pourrait donner au solide S le mouvement qu'il prend dans les conditions données en supposant qu'il soit lié invariablement à un cône (C) qui aurait O pour sommet, V pour base et faisant rouler (C) sur un cône égal (C_1) qui a V_1 pour base; les deux cônes seront constamment symétriques par rapport à leur plan tangent commun; toutefois, ils coïncideront quand leur génératrice commune passera par l'un des points de rebroussement de V et de V_1; la rotation instantanée est mesurée à chaque instant par la distance du point fixe au point de contact de V et de V_1.