NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FOURET

Sur quelques problèmes de géométrie descriptive concernant les surfaces gauches du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 34-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__34_0>

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE CONCERNANT LES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

On rencontre, en Géométrie descriptive, un certain nombre de problèmes qui consistent ou se ramènent immédiatement à *chercher les points d'intersection d'une droite avec une surface gauche du second degré, définie par trois directrices rectilignes, ou par deux directrices rectilignes et un plan directeur.* Les solutions que l'on donne généralement de ces questions nous ayant paru laisser à désirer, au point de vue de la simplicité et de l'élégance, nous avons pensé qu'il serait peut-être utile de faire connaître celles auxquelles nous avons été conduit, en nous appuyant sur les notions les plus élémentaires de Géométrie projective.

Nous résoudrons tout d'abord un problème relatif à la parabole, dont nous aurons à faire usage dans la suite de cette Note.

Mener, dans un plan, par un point donné m, une tangente à la parabole (ϖ) *qui touche trois droites données* (A), (B), (C), *et dont l'axe est parallèle à une direction donnée* (λ).

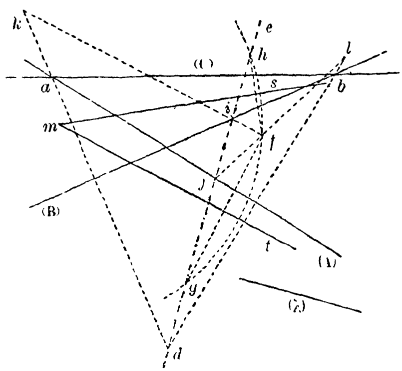
Soient a et b les points où la droite (C) coupe respectivement les droites (A) et (B) (*fig.* 1). D'après un théorème bien connu dû à Steiner [1], on obtient un

---

[1] *Les hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se coupent sur la directrice de cette courbe.*

point de la directrice de la parabole (ϖ), en prenant le point d d'intersection des perpendiculaires abaissées respectivement des points a et b sur les droites (B) et (A); par conséquent, la directrice est la perpendiculaire de

Fig. 1.



abaissée du point d sur la direction (λ). On a ensuite le foyer f, en remarquant que, le symétrique de ce point par rapport à une tangente quelconque étant sur la directrice. la droite symétrique de la directrice par rapport à cette tangente passe par le foyer. En conséquence, les symétriques des droites (A) et (B) par rapport à de se coupent au foyer f. La symétrique de de par rapport à (A) s'obtient d'ailleurs simplement en joignant le point j, où (A) coupe de, au point l symétrique de d par rapport à (A). La symétrique ik de de par rapport à (B) se construit de la même manière. Il n'y a plus maintenant qu'à appliquer la construction classique, qui fournit les tangentes menées d'un point donné à une parabole dont on connaît le foyer et la directrice. A cet effet, du point m comme centre on décrit une circonférence passant par f; on joint le point f aux points g et h de rencontre de cette circonférence avec la directrice de, et du point m on abaisse respectivement sur fg et fh les perpendiculaires ms et mt. Les droites ms et mt sont les tangentes cherchées ([1]).

Remarque. — Si, au lieu de connaître la direction de l'axe de la parabole, on en connaissait une quatrième tangente, on déterminerait, d'après le théorème de Steiner, un second point de la directrice de, et la construction s'achèverait comme précédemment.

I. *Construire une droite rencontrant quatre droites données.*

Soient (X), (Y), (Z), (T) quatre droites données, occupant dans l'espace des positions quelconques les unes par rapport aux autres. Imaginons la quadrique engendrée par une droite mobile Δ, s'appuyant sur les trois droites (X), (Y), (T), et considérons les deux points d'intersection de cette quadrique avec la droite (Z). Par chacun de ces points passe une droite, et une seule, telle que Δ. Les deux droites ainsi obtenues satisfont aux conditions du problème, lequel est par conséquent ramené à chercher les points de rencontre de la droite (Z) avec la quadrique gauche (Σ), qui a pour directrices les droites (X), (Y), (T).

Prenons, à cet effet, un point o sur (Z) et un plan (II) parallèle au plan passant par le point o et la droite

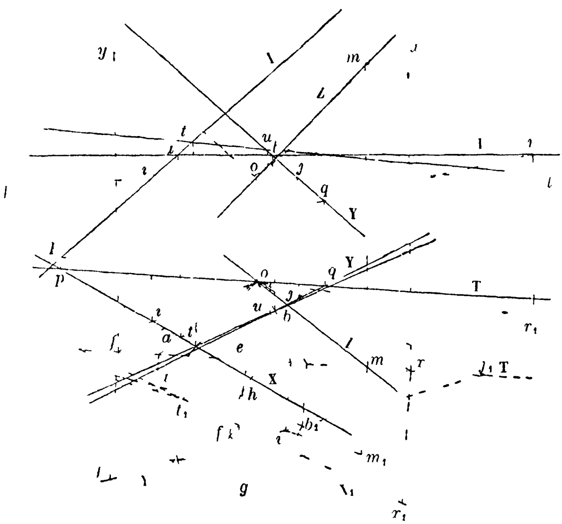
([1]) Il est bien clair, d'ailleurs, que ces deux tangentes, dans certains cas, pourront être imaginaires. Les problèmes résolus dan cette Note étant des problèmes du second degré, une observation analogue s'applique à leur solution.

(T). Puis du point o comme point de vue faisons une perspective sur le plan (II). Les perspectives des droites telles que Δ enveloppent une conique Γ, qui résulte de la section par le plan (II) du cône de sommet o, circonscrit à (Σ). Cette conique Γ est d'ailleurs tangente aux perspectives (X_1) et (Y_1) des droites (X) et (Y); elle est pareillement tangente à la perspective de la droite (T), laquelle est rejetée à l'infini, d'après l'hypothèse faite sur le choix du plan (II). De cette dernière remarque il résulte que la conique Γ est une parabole. Cette parabole est complètement déterminée par les conditions d'être tangente aux droites (X_1), (Y_1) et aux perspectives de la droite Δ prise dans deux positions particulières. Mais les droites cherchées, devant rencontrer à la fois (X), (Y), (Z) et (T), ont pour perspectives les tangentes menées à la parabole Γ par le point m d'intersection de la droite (Z) avec le plan (II). Le problème se résoudra donc en menant du point m des tangentes à la parabole Γ, ce qui se fera à l'aide d'une construction indiquée plus haut.

On pourra aussi prendre l'intersection de (T) avec la droite joignant les points de rencontre du plan o(T) avec (X) et (Y). On aura ainsi le point de contact du plan o(T) avec la quadrique (Σ). La droite joignant le point o au point ainsi obtenu rencontrera le plan (II) à l'infini au point de contact de la parabole Γ avec la droite de l'infini, c'est-à-dire sera parallèle à l'axe de cette parabole. Il suffira alors de construire la perspective d'une seule droite Δ, et il restera à mener par le point m des tangentes à une parabole dont on connaît trois tangentes et la direction de l'axe, problème dont la solution a été exposée tout à l'heure.

On simplifiera pratiquement l'épure, en prenant le plan (H) parallele à l'un des plans projetants de la droite (T), et le point de vue o à l'intersection de ce plan projetant avec la droite (Z). Nous allons du reste indiquer brievement le detail des operations graphiques. Soient respectivement X et X', Y et Y', Z et Z', Γ et Γ' les projections horizontales et verticales des quatre droites donnees (*fig.* 2). Prenons pour point de vue de la perspective le point (o, o') d'intersection de la droite (Z, Z')

Fig. 2



avec le plan projetant horizontalement la droite (Γ, Γ'), et pour plan du tableau un plan parallele au precedent, ayant par consequent sa trace horizontale Γ_1 parallele à Γ. Supposons un instant la perspective obtenue pour exécuter les constructions voulues dans le plan du tableau, nous rendrons ce plan horizontal en le faisant tourner autour de celle de ses horizontales qui est au niveau du point (o, o').

Cherchons les perspectives des droites (X, X') et (Y, Y'). Le plan horizontal passant par (o, o'), et représenté par sa trace verticale hl, coupe (X, X') au point (i, i'), dont la perspective i_1 est à la rencontre de T_1 et de oi. Menons par (o, o') une parallèle à (X, X'), qui coupe le plan vertical T_1 au point (x, x') : ce point (x, x') donne par rabattement un second point x_1 de la perspective X_1 de la droite (X, X'); on peut par suite tracer X_1. On obtient de même en rabattement la perspective Y_1 de la droite (Y, Y'), en joignant la perspective j_1 du point (j, j') à l'intersection y_1 du plan du tableau avec la parallèle $(oy, o'y')$ à (Y, Y'). Les droites X_1 et Y_1 sont deux tangentes de la parabole Γ. Pour en avoir une troisième, faisons la perspective de la droite qui est située dans le plan projetant verticalement (T, T') et s'appuie à la fois sur (X, X') et (Y, Y'). Le plan projetant verticalement (T, T') coupe (X, X') en (a, a') et (Y, Y') en (b, b'). Les perspectives de ces deux points sont rabattues respectivement en a_1 sur X_1 et en b_1 sur Y_1. La droite $a_1 b_1$ est une troisième tangente de la parabole Γ.

Pour avoir la direction de l'axe de cette parabole, prenons les points (p, p') et (q, q') d'intersection du plan vertical passant par (T, T') avec les droites (X, X') et (Y, Y'). La droite $(pq, p'q')$ coupe (T, T') en un point (r, r') : la droite $(or, o'r')$ est parallèle à l'axe de la parabole Γ. Rendons horizontal le plan vertical T, par une rotation autour de son horizontale passant par (o, o') : le point (r, r') se rabat en r_1, et la droite or_1 est parallèle à l'axe de la parabole Γ, lorsque le plan du tableau qui contient cette courbe est rendu horizontal. Le rabattement du point m_1, où la droite (Z, Z') perce le plan du tableau, s'obtient d'ailleurs immédiatement.

On est ainsi conduit à mener par le point m_1 des tangentes à une parabole dont on connaît trois tangentes et la direction de l'axe. Pour cela [1], des points a_1 et b_1 on abaisse respectivement sur Y_1 et X_1 des perpendiculaires qui vont se couper en un point d. La droite de perpendiculaire à or_1 est la directrice de la parabole. Le foyer est à l'intersection des droites symétriques de de par rapport à X_1 et à Y_1. Du point m_1 comme centre décrivons une circonférence passant par le point f et rencontrant de en g et h. Les droites $m_1 s_1$ et $m_1 t_1$, respectivement perpendiculaires à fg et à fh, sont les tangentes à la parabole Γ qui passent par m_1. Soient t_1 et u_1 les points où l'une de ces tangentes coupe respectivement X_1 et Y_1. Les droites joignant le point o aux projections de t_1 et de u_1 sur la droite T_1 rencontrent respectivement X et Y en t et u. La droite tu est la projection horizontale d'une des droites cherchées : on en obtient immédiatement la projection verticale $t'u'$. Les projections horizontale et verticale de la seconde droite cherchée se déduiraient de la même manière de la seconde tangente $m_1 s_1$ menée de m_1 à la parabole Γ.

Remarque. — L'épure précédente peut être faite de vingt-quatre manières : on peut en effet prendre le point de vue sur l'une quelconque des quatre droites données, et, une fois le point de vue choisi sur l'une d'elles, on peut prendre le plan du tableau parallèle au plan projetant horizontalement ou au plan projetant ver-

[1] Nous ne faisons qu'appliquer la construction exposée en détail au commencement de cette Note.

ticalement l'une des trois autres, ce qui donne six orientations différentes pour le plan du tableau.

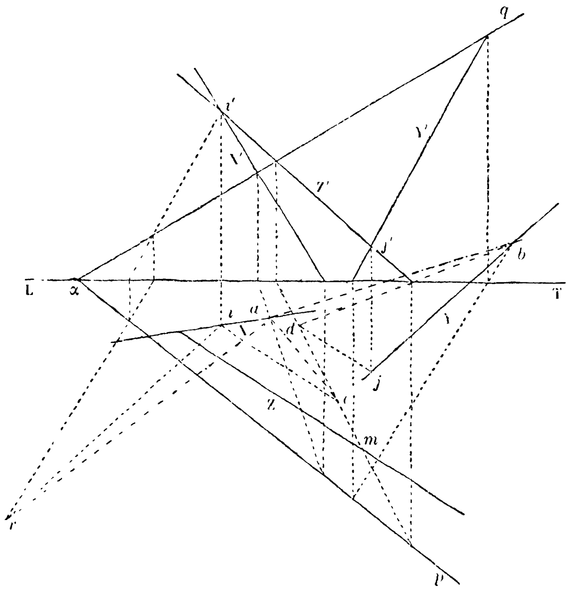
II. *Construire une droite rencontrant trois droites données et parallèle à un plan donné.*

Ce problème peut, en quelque sorte, être considéré comme un cas particulier du précédent, la droite cherchée devant, au point de vue de la Géométrie projective, rencontrer, outre les trois droites données, une quatrième droite située à l'infini dans le plan donné; aussi est-il facile de déduire la solution de ce nouveau problème de celle du précédent.

Soient (X), (Y), (Z) les trois droites données et (P) le plan donné. Le point de vue o étant pris sur l'une des droites, sur (Z) par exemple, il est clair que l'on ramènera les conditions du problème à celles du précédent en choisissant pour plan (II), sur lequel on fait la perspective, un plan parallele au plan (P) ou, plus simplement encore, le plan (P) lui-même. Rien n'empêchera d'ailleurs de supposer le point o à l'infini sur (Z), et de remplacer, par conséquent, la perspective sur le plan (P) par une projection oblique faite sur le même plan parallèlement à (Z). Dans tous les cas, et de quelque manière que soit choisi le point de vue o, à distance finie ou à l'infini, on projettera de ce point sur le plan (P) les droites (X) et (Y), et l'on joindra par une droite Δ les points d'intersection de (X) et de (Y) avec le plan (P). On aura ainsi trois tangentes de la parabole Γ, à laquelle il s'agira de mener des tangentes par la trace m de la droite (Z) sur le plan (P). On complétera la détermination de cette parabole en déterminant la direction de son axe, lequel est parallèle à l'axe du paraboloide hyperbolique engendré par la droite Δ, c'est-à-dire à l'intersection du plan (P) avec un plan parallèle aux deux droites (X) et (Y). On sera ainsi ramené au problème résolu au début de cette Note.

Indiquons maintenant brièvement le détail des constructions. Soient (*fig.* 3), sur deux plans de projection se coupant suivant la ligne de terre LT, X et X′, Y et Y′, Z et Z′ les projections horizontale et verticale des

Fig. 3.



trois droites données, αp et αq les traces horizontale et verticale du plan (P) donné. Il est clair que la construction à effectuer dans le plan (P), à laquelle nous ramenons le problème, peut être remplacée par la même construction exécutée sur les projections horizontales (ou verticales) des éléments sur lesquels on devrait opérer dans le plan (P) lui-même : cela tient à ce que le problème à résoudre, relativement à la parabole Γ située dans le plan (P), est projectif et à ce que, par une projection cylindrique, la parabole Γ est changée en une autre parabole (γ) dont l'axe est parallèle à la projection de l'axe de la première. Cette remarque apporte de nouvelles simplifications dans la solution. Prenons, suivant les procédés connus, les projections horizontales a et b des traces des droites (X, X′) et (Y, Y′) sur le plan $p\alpha q$. La droite ab est tangente à la parabole (γ). Projetons les droites (X, X′) et (Y, Y′) sur le plan $p\alpha q$ parallèlement à (Z, Z′). Pour projeter (X, X′), par exemple, il suffit d'en projeter l'un des points, et de préférence, pour simplifier, le point (i, i') d'intersection de cette droite avec le plan projetant verticalement (Z, Z′). On obtient en c la projection horizontale de la projection oblique sur le plan (P) du point (i, i') : ac est une seconde tangente de la parabole (γ). En opérant de même sur le point (j, j') d'intersection de la droite (Y, Y′) avec le plan projetant verticalement (Z, Z′), on obtient le point d : bd est une troisième tangente de la parabole (γ). Pour avoir la direction de l'axe de cette parabole, menons par le point (i, i') une parallèle à la droite (Y, Y′), prenons en r la projection horizontale de l'intersection avec le plan $p\alpha q$ de la droite ainsi tracée : ar, étant la projection horizontale de l'intersection du plan $p\alpha q$ avec un plan mené par (X, X′) parallèlement à (Y, Y′), est parallèle à l'axe de la parabole (γ). Il n'y a maintenant qu'à mener à la parabole (γ), complètement déterminée par les éléments obtenus, des tangentes par le point m, projection horizontale de la trace de la droite (Z, Z′) sur le plan $p\alpha q$. Ce problème ayant déjà été résolu plus haut, nous supprimons sur l'épure les constructions qui s'y rapportent, pour ne pas compliquer inutilement la figure. Soient t et u [1] les points où l'une des tangentes menées du point m à (γ) coupe respectivement ac et bd. Pour avoir la droite qui, s'appuyant sur (X, X') et (Y, Y'), se projette sur le plan $p\alpha q$, parallèlement à (Z, Z'), suivant une droite projetée horizontalement en mt, il suffira de faire, en partant des points t et u, la construction inverse de celle qui nous a permis d'obtenir les points c et d, en partant des points (i, i') et (j, j'). La droite joignant les points de (X, X') et (Y, Y') ainsi trouvés sera l'une des droites cherchées. On aura la seconde par une construction toute semblable.

Remarques. — 1° La construction qui vient d'être exposée peut se faire de six manières, puisque l'on peut faire la projection oblique sur le plan $p\alpha q$ parallèlement à l'une quelconque des trois droites données (X, X'), (Y, Y'), (Z, Z'), et que l'on peut ensuite projeter orthogonalement la figure obtenue sur l'un quelconque des deux plans de projection.

2° Au lieu de projeter la figure située dans le plan $p\alpha q$ sur l'un des plans de projection, on pourrait procéder en rabattant le plan $p\alpha q$ sur l'un de ces deux plans; mais on arriverait ainsi à des constructions un peu moins simples.

Les deux problèmes dont la solution vient d'être donnée permettent de résoudre simplement un assez grand nombre de questions relatives aux surfaces gauches du second degré. Nous allons les passer en revue, en indiquant, brièvement pour chacune d'elles, comment on en ramène la solution à celle de l'un des problèmes précédents.

---

[1] Cette partie des constructions n'est pas représentée sur la figure.

III. *Trouver les points d'intersection d'une droite avec une surface gauche du second degré, dont on donne trois génératrices rectilignes d'un même système.*

Soit à chercher l'intersection de la droite (D) avec la quadrique gauche ayant pour génératrices rectilignes d'un même système les trois droites (A), (B), (C). On construira les deux droites qui rencontrent à la fois les quatre droites (A), (B), (C), (D) (problème I). Les points d'intersection des deux droites obtenues avec (D) seront les points cherchés.

IV. *Mener, par une droite donnée* (D), *un plan tangent à une surface gauche du second degré, dont on donne trois génératrices rectilignes d'un même système.*

Ce problème, comme on le sait, se ramène au précédent. On prend les points de rencontre de la droite (D) avec la surface (problème III); puis on construit les deux génératrices rectilignes de cette surface qui passent par chacun de ces deux points. Les quatre génératrices rectilignes, ainsi obtenues, appartiennent par couples à des systèmes différents, et les génératrices d'un même couple déterminent un plan, qui est un des deux plans tangents demandés.

V. *Construire, en un point donné par une de ses projections, un plan tangent à une surface gauche du second degré, déterminée par trois génératrices rectilignes d'un même système.*

Supposons, par exemple, que le point soit donné par sa projection horizontale. Ce point doit se trouver à la rencontre d'une verticale déterminée avec la surface. Le problème à résoudre, pour avoir la projection verticale du point, est donc un cas particulier du problème III. Le plan tangent se construit ensuite suivant les méthodes bien connues.

VI. *Mener, parallèlement à un plan donné, un plan tangent à une surface gauche du second degré, déterminée par trois génératrices rectilignes d'un même système.*

La génératrice du second système, située dans le plan tangent cherché, doit s'appuyer sur les trois génératrices rectilignes données et être parallèle au plan donné. On la déterminera par la méthode qui résoud le problème II. On obtiendra ensuite par les procédés connus le point de contact de chacun des deux plans tangents trouvés.

VII. *Trouver les points d'intersection d'une droite et d'un paraboloïde hyperbolique engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné.*

Soit à chercher l'intersection de la droite (D) avec le paraboloïde hyperbolique engendré par une droite mobile, qui s'appuie sur deux droites fixes (A) et (B), en restant parallèle à un plan (P). On construira les deux droites parallèles au plan (P), qui rencontrent les trois droites (A), (B) et (D) (problème II). Les points d'intersection des deux droites obtenues avec (D) seront les points cherchés.

VIII. *Mener, par une droite donnée* (D), *un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique, engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné.*

On sait que ce problème se résoud au moyen du précédent. On prend les deux points d'intersection de la droite (D) avec le paraboloïde (problème VII); puis on construit les deux génératrices rectilignes de la surface qui passent par chacun de ces deux points. Les quatre génératrices rectilignes ainsi obtenues appartiennent par couples à des systèmes différents; chacun de ces couples de génératrices détermine un plan qui est un des plans tangents cherchés.

IX. *Construire, en un point donné par une de ses projections, un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique, engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné.*

Soit donnée, par exemple, la projection horizontale d'un point de la surface. Ce point doit se trouver à l'intersection de la surface avec une verticale déterminée. On est ainsi ramené à un cas particulier du problème VII. Ayant obtenu les points cherchés, on construira, d'après les procédés connus, le plan tangent au paraboloïde en chacun de ces points.

Remarque. — Les constructions nécessaires pour résoudre les problèmes VII, VIII et IX, déjà simples dans le cas le plus général, se simplifient encore lorsque le plan directeur du paraboloïde coïncide avec un des plans de projection.

Application à la construction des normales à certaines surfaces. — Les normales aux surfaces trajectoires des divers points d'un solide, dont le déplacement dépend de deux paramètres variables, possèdent, comme on le sait, pour chaque position particulière du solide, la belle propriété de rencontrer deux mêmes droites (Mannheim, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, 2e édition, p. 277). Connaissant, pour une position quelconque du solide, les normales à quatre des surfaces trajectoires, il sera facile, au moyen de la solution donnée plus haut du problème I, de construire les deux droites rencontrant ces quatre normales et d'en déduire la normale à l'une quelconque des surfaces trajectoires du solide.