NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. E. FONTANEAU

Sur le problème de Clebsch (Théorie de l'élasticité des corps solides), paragraphe 39 à 42

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 478-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__478_1>

est ainsi démontrée rigoureusement; il faut supposer x compris entre $\pm \frac{\pi}{2}$.

5. On peut obtenir d'une façon analogue le développement

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x - \ldots.$$

On déterminera d'abord une expression

$$\Psi_n(x) = a_1 \sin 2x + a_2 \sin 4x + \ldots + a_n \sin 2nx,$$

par la condition que le développement de $\Psi_n(x)$ soit de cette forme

$$\Psi_n(x) = x + k_n x^{2n+1} + k_{n+1} x^{2n+3} + \ldots.$$

On obtient immédiatement la valeur de $\Psi_n(x)$ en remarquant que

$$\Psi_n(x) - x$$

ne peut différer que par un facteur constant de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n}\, dx,$$

et la suite du raisonnement est tout à fait semblable à ce que nous venons d'exposer en détail.

SUR LE PROBLÈME DE CLEBSCH (THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES, § 39 A 42);

Par M. E. FONTANEAU.

1. L'équilibre d'élasticité des corps cylindriques a fait l'objet d'une étude spéciale, à raison de leur emploi

fréquent dans les constructions et dans les machines. Parmi les auteurs qui s'en sont occupés, il y a lieu de distinguer de Saint-Venant et Clebsch. Le premier, dans deux Mémoires célèbres, a considéré le cas simple où l'équilibre d'un cylindre résulte de pressions ou tractions appliquées à l'une de ses bases, tandis que l'autre est fixée d'une manière quelconque, et il a obtenu par le calcul, relativement à deux modes particuliers de sa déformation, la flexion et la traction, des résultats importants qu'il a ensuite vérifiés par l'expérience.

Clebsch, auquel on doit, dans son ouvrage classique *Sur la théorie de l'élasticité des corps solides,* une exposition remarquable de la question traitée par de Saint-Venant, s'est ensuite placé sur un autre terrain. L'ingénieur français n'avait étudié que des états d'équilibre caractérisés par l'absence de pressions latérales; le géomètre allemand s'occupa précisément du cas où elles existent seules. Dans l'équilibre d'une plaque plane, c'est-à-dire d'un cylindre de longueur très restreinte, il parait avoir voulu rechercher l'effet propre produit dans ses sections transversales par les pressions ou tractions appliquées à sa surface courbe et compléter ainsi dans un champ d'études contigu, mais distinct, les travaux de de Saint-Venant. C'est sans doute à raison de ce but, et peut-être aussi des difficultés du sujet, qu'il a supposé nulle la composante normale d'élasticité parallèle à l'axe du cylindre; mais on peut, sans compliquer les calculs, s'affranchir de cette restriction.

D'ailleurs Clebsch a cru devoir s'occuper des conditions spéciales à la surface du corps, sans avoir effectué complètement l'intégration indéfinie des équations aux dérivées partielles de l'élasticité. Si ce procédé, quelque peu anormal, ne pouvait avoir de la part d'un si habile géomètre que des inconvénients médiocres, on comprend néanmoins qu'il en résulte une lacune qu'il est nécessaire de combler, dans l'intérêt de la question qu'il a traitée, *sans l'épuiser*.

Je crois donc utile de revenir sur ce sujet pour en rendre élémentaire, s'il est possible, l'exposition, en le rattachant à la méthode générale de solution inaugurée par Lamé et, après lui, appliquée avec succès par plusieurs géomètres français, qu'il est inutile de citer parce que leurs travaux ont été publiés dans des recueils universellement répandus. Pour ne pas embrasser un cadre trop étendu, je me bornerai au problème le plus facile parmi ceux dont Clebsch a donné la solution, en supposant nulle avec lui, pour tous les points du corps, la composante normale d'élasticité N_z (notation de Lamé et de Franz Neumann) et admettant, en outre, qu'il n'y ait pas de forces extérieures appliquées à la masse du corps.

2. Si l'on désigne par λ_1 l'une des dilatations principales en un point (x, y, z) d'un corps élastique, et par α_1, β_1, γ_1 ses trois cosinus directeurs par rapport au système d'axes rectangulaires OX, OY, OZ, on a, en général,

$$(1)\quad \begin{cases} \delta\alpha_1 = \alpha_1\left(\dfrac{du}{dx} - \lambda_1\right) + \beta_1\dfrac{du}{dy} + \gamma_1\dfrac{du}{dz} \\ \quad = -\alpha_1\left(\dfrac{du}{dx} - \lambda_1\right) - \beta_1\dfrac{dv}{dx} - \gamma_1\dfrac{dw}{dx}, \\ \delta\beta_1 = \alpha_1\dfrac{dv}{dx} + \beta_1\left(\dfrac{dv}{dy} - \lambda_1\right) + \gamma_1\dfrac{dv}{dz} \\ \quad = -\alpha_1\dfrac{du}{dy} - \beta_1\left(\dfrac{dv}{dy} - \lambda_1\right) - \gamma_1\dfrac{dw}{dy}, \\ \delta\gamma_1 = \alpha_1\dfrac{dw}{dx} + \beta_1\dfrac{dw}{dy} + \gamma_1\left(\dfrac{dw}{dz} - \lambda_1\right) \\ \quad = -\alpha_1\dfrac{du}{dz} - \beta_1\dfrac{dv}{dz} - \gamma_1\left(\dfrac{dw}{dz} - \lambda_1\right), \end{cases}$$

où $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, $\delta\gamma_1$ désignent les variations des cosinus directeurs de la dilatation principale due à la déformation du corps.

Je suppose que cette déformation ait lieu de manière que l'on ait pour tous les points du corps les égalités

$$(2)\qquad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=0,\qquad \frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}=0,\qquad \lambda\theta+2\mu\frac{dw}{dz}=0,$$

ou, ce qui revient au même pour un corps isotrope,

$$T_y=0,\qquad T_x=0,\qquad N_z=0.$$

Par suite des formules (1) et des deux premières égalités (2), on a les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\alpha_1\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)+\beta_1\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)&=0,\\ \alpha_1\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+2\beta_1\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)&=0,\\ 2\gamma_1\left(\frac{dw}{dz}-\lambda_1\right)&=0,\end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut satisfaire de trois manières :

1° Par le système de conditions

$$(4)\qquad \frac{dw}{dz}-\lambda_1=0,\qquad \alpha_1=0,\qquad \beta_1=0,\qquad \gamma_1=0;$$

2° par le suivant

$$4\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)-\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)^2=0,$$
$$\alpha_1^2+\beta_1^2=0,\qquad \gamma_1=0;$$

3° enfin, en supposant qu'on ait, abstraction faite de toute valeur particulière des cosinus,

$$4\left(\frac{du}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{dv}{dy}-\lambda_1\right)-\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)^2=0,$$
$$\frac{dw}{dz}-\lambda_1=0.$$

Je m'occuperai exclusivement de la première hypothèse définie par les relations (4), parce que le calcul montrera qu'elle comprend les deux autres.

Si, pour la commodité des expressions, on pose

$$\delta\alpha_1 = A_1, \qquad \delta\beta_1 = B_1, \qquad \delta\gamma_1 = C_1,$$

on aura, par les formules (1),

$$(5) \qquad A_1 = \frac{du}{dz} = -\frac{dw}{dx}, \qquad B_1 = \frac{dv}{dz} = -\frac{dw}{dy}, \qquad C_1 = 0,$$

et, d'après la troisième égalité (2),

$$(6) \qquad \frac{dw}{dz} = \lambda_1 = -\frac{\lambda}{2\mu}\theta.$$

Il faut, dans ces conditions particulières, satisfaire aux équations aux dérivées partielles de la déformation des corps isotropes, dans le cas de l'équilibre, qui sont, comme on le sait,

$$(7) \qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta u = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta v = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta w = 0, \end{cases}$$

où Δ désigne l'opération $\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2} + \dfrac{d^2}{dz^2}$ et θ la dilatation cubique définie par l'égalité

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

De là il résulte

$$(8) \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy}\right], \\ \Delta w = -\dfrac{dA_1}{dx} - \dfrac{dB_1}{dy} - \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{dA_1}{dx} + \dfrac{dB_1}{dy}\right] \\ \qquad = -\dfrac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{dA_1}{dx} + \dfrac{dB_1}{dy}\right], \end{cases}$$

et ces expressions, substituées dans la troisième équation (7), la réduisent à une identité; on n'a donc à satisfaire qu'aux deux autres, qui deviennent.

$$(9)\quad \begin{cases} \mu\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2u}{dy^2}\right] \\ \qquad +\dfrac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2v}{dx\,dy}\right]+\mu\dfrac{dA_1}{dz}=0, \\ \mu\left[\dfrac{d^2v}{dx^2}+\dfrac{d^2v}{dy^2}\right] \\ \qquad +\dfrac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\dfrac{d^2u}{dx\,dy}+\dfrac{d^2v}{dy^2}\right]+\mu\dfrac{dB_1}{dz}=0. \end{cases}$$

Or, en vertu des relations (5), (6) et (8), il vient

$$\frac{dA_1}{dy}=\frac{dB_1}{dx},$$

$$\frac{dA_1}{dz}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}\right],$$

$$\frac{dB_1}{dz}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2v}{dy^2}\right]$$

et, par suite,

$$\frac{d^2A_1}{dz^2}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dx\,dy}\right]=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}\right],$$

$$\frac{d^2B_1}{dz^2}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx\,dy}+\frac{d^2B_1}{dy^2}\right]=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2B_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dy^2}\right].$$

On a d'ailleurs, par les équations (9),

$$\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dx\,dy}\right]+\frac{d^2A_1}{dz^2}=0,$$

$$\frac{d^2B_1}{dx^2}+\frac{d^2B_1}{dy^2}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{d^2A_1}{dx\,dy}+\frac{d^2B_1}{dy^2}\right]+\frac{d^2B_1}{dz^2}=0;$$

et, de toutes ces égalités, il est aisé de conclure, pour la détermination de A_1 et de B_1, les relations

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2A_1}{dz^2}=0, & \dfrac{d^2A_1}{dx^2}+\dfrac{d^2A_1}{dy^2}=\dfrac{d^2A_1}{dx^2}+\dfrac{d^2B_1}{dx\,dy}=0, \\ \dfrac{d^2B_1}{dz^2}=0, & \dfrac{d^2B_1}{dx^2}+\dfrac{d^2B_1}{dy^2}=\dfrac{d^2A_1}{dx\,dy}+\dfrac{d^2B_1}{dy^2}=0, \end{cases}$$

auxquelles on satisfait d'une manière générale en posant

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{d\omega}{dx} + \frac{n_1}{2}(x+y)\right]z + \frac{dK}{dx} + \frac{N_1}{2}(x+y), \\ B_1 &= \left[\frac{d\omega}{dy} + \frac{n_1}{2}(x+y)\right]z + \frac{dK}{dy} + \frac{N_1}{2}(x+y), \end{aligned}\right.$$

où n_1 et N_1 désignent des constantes, tandis que ω et K sont des fonctions de x et y assujetties à vérifier les équations aux dérivées partielles

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0,$$
$$\frac{d^2K}{dx^2} + \frac{d^2K}{dy^2} = 0.$$

3. Des relations (5) et (11), on déduit, pour les composantes de déformation u, v, w,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \left[\frac{d\omega}{dx} + \frac{n_1}{2}(x+y)\right]\frac{z^2}{2} + \left[\frac{dK}{dx} + \frac{N_1}{2}(x+y)\right]z + U, \\ v &= \left[\frac{d\omega}{dy} + \frac{n_1}{2}(x+y)\right]\frac{z^2}{2} + \left[\frac{dK}{dy} + \frac{N_1}{2}(x+y)\right]z + V, \\ \frac{dw}{dx} &= -\left[\frac{d\omega}{dx} + \frac{n_1}{2}(x+y)\right]z - \frac{dK}{dx} - \frac{N_1}{2}(x+y), \\ \frac{dw}{dy} &= -\left[\frac{d\omega}{dy} + \frac{n_1}{2}(x+y)\right]z - \frac{dK}{dy} - \frac{N_1}{2}(x+y), \\ \frac{dw}{dz} &= \lambda_1 = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right] \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[n_1\frac{z^2}{2} + N_1 z + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\right], \end{aligned}\right.$$

expressions où U et V désignent des fonctions de x et y à déterminer.

Pour cela, il faut substituer dans les équations (9) les expressions (12) de u et de v; les termes du résultat où entrent z^2 et z se détruisent, et il vient

$$(13)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}\right]+2(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right] \\ \quad =-(\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right], \\ (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right]+2(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx\,dy}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right] \\ \quad =-(\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]. \end{cases}$$

D'ailleurs, par les conditions d'intégrabilité, on déduit des égalités (12)

$$(14)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=\lambda\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right], \\ (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=\lambda\left[\dfrac{d^2U}{dx\,dy}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right], \end{cases}$$

d'où il résulte, d'une part,

$$(15)\qquad \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}\left[\omega+\frac{n_1}{4}(x+y)^2\right],$$

et, d'autre part,

$$(16)\quad \begin{cases} \lambda\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}\right]+(3\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0, \\ \lambda\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right]+(3\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0. \end{cases}$$

De ces deux relations, on déduit encore celles-ci :

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda\left[\dfrac{d^2U}{dy^2}-\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right]+4(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dx}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0, \\ \lambda\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}-\dfrac{d^2U}{dx\,dy}\right]+4(\lambda+\mu)\left[\dfrac{d\omega}{dy}+\dfrac{n_1}{2}(x+y)\right]=0, \end{cases}$$

qui ne peuvent subsister ensemble, à moins que l'on n'ait

$$n_1=0;$$

supprimant donc cette constante, on aura

$$(18)\quad \begin{cases} \lambda\left[\dfrac{dU}{dx}+\dfrac{dV}{dy}\right]=(\lambda+2\mu)\omega, \\ \lambda\left[\dfrac{dV}{dx}-\dfrac{dU}{dy}\right]=4(\lambda+\mu)\displaystyle\int\left[\dfrac{d\omega}{dx}dy-\dfrac{d\omega}{dy}dx\right]. \end{cases}$$

J'observe ensuite qu'on peut remplacer les équations (13) par les suivantes :

$$(19)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}\right] \\ \qquad +(3\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dx\,dy}\right]=0, \\ (\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right] \\ \qquad +(3\lambda+2\mu)\left[\dfrac{d^2U}{dx\,dy}+\dfrac{d^2V}{dy^2}\right]=0, \end{cases}$$

dont la solution générale est donnée par les formules

$$(20)\quad \begin{cases} U=-\dfrac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\left[x\dfrac{d\Omega_1}{dx}+y\dfrac{d\Omega_2}{dx}\right]+\dfrac{5\lambda+6\mu}{8(\lambda+\mu)}\Omega_1, \\ V=-\dfrac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\left[x\dfrac{d\Omega_1}{dy}+y\dfrac{d\Omega_2}{dy}\right]+\dfrac{5\lambda+6\mu}{8(\lambda+\mu)}\Omega_2, \end{cases}$$

où Ω_1, Ω_2 désignent des fonctions assujetties à vérifier les équations

$$(21)\qquad \frac{d^2\Omega_1}{dx^2}+\frac{d^2\Omega_1}{dy^2}=0, \qquad \frac{d^2\Omega_2}{dx^2}+\frac{d^2\Omega_2}{dy^2}=0.$$

De ces formules, il résulte

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{dx}+\dfrac{dV}{dy}=\dfrac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d\Omega_1}{dx}+\dfrac{d\Omega_2}{dy}\right], \\ \dfrac{dV}{dx}-\dfrac{dU}{dy}=\dfrac{d\Omega_2}{dx}-\dfrac{d\Omega_1}{dy}. \end{cases}$$

et par suite des égalités (18), on a

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy} = \dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}\,\omega, \\ \dfrac{d\Omega_2}{dx} - \dfrac{d\Omega_1}{dy} = \dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}\displaystyle\int\left[\frac{d\omega}{dx}dy - \frac{d\omega}{dy}dx\right], \end{cases}$$

relations compatibles avec les équations (21).

D'après cela, il vient

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dx} = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx^2} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dx\,dy}\right], \\ \dfrac{d\omega}{dy} = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx\,dy} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dy^2}\right], \end{cases}$$

et, en portant ces expressions dans les formules (12), on peut leur substituer les suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx^2} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dx\,dy}\right]\dfrac{z^2}{2} \\ \qquad + \left[\dfrac{dK}{dx} + \dfrac{N_1}{2}(x+y)\right]z + U, \\ v = \dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d^2\Omega_1}{dx\,dy} + \dfrac{d^2\Omega_2}{dy^2}\right]\dfrac{z^2}{2} \\ \qquad + \left[\dfrac{dK}{dy} + \dfrac{N_1}{2}(x+y)\right]z + V, \\ w = -\dfrac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy}\right]z \\ \qquad - \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\dfrac{N_1}{2}z^2 - \dfrac{N_1}{4}(x+y)^2 - K. \end{cases}$$

Ces expressions, complétées par les valeurs (20) de U et V, donnent les formules générales d'intégration des équations (7) dans le cas considéré. En effet, la méthode qui y a conduit est absolument indépendante de la signification donnée, conformément aux formules (1), aux quantités A_1, B_1 et λ_1, et par suite n'est sujette à aucune restriction. Néanmoins rien n'empêche d'y joindre, avec la signification donnée aux quantités λ_1,

A_1, B_1, leurs expressions

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{dw}{dz} = -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d\Omega_1}{dx}+\frac{d\Omega_2}{dy}\right]-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}N_1 z,\\
A_1 &= \rho_2 = \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d^2\Omega_1}{dx^2}+\frac{d^2\Omega_2}{dx\,dy}\right]z\\
&\qquad +\frac{dK}{dx}+\frac{N_1}{2}(x+y),\\
-B_1 &= \rho_1 = -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy}+\frac{d^2\Omega_2}{dy^2}\right]z\\
&\qquad -\frac{dK}{dy}-\frac{N_1}{2}(x+y),\\
\rho_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{d\Omega_2}{dx}-\frac{d\Omega_1}{dy}\right],
\end{aligned}\right.$$

en désignant par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois composantes de rotation définies par les égalités

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right) = -B_1,$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right) = A_1,$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right).$$

La dilatation cubique θ est d'ailleurs donnée par l'égalité

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}
\theta &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\\
&= \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}N_1 z+\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\left[\frac{d\Omega_1}{dx}+\frac{d\Omega_2}{dy}\right].
\end{aligned}\right.$$

4. PROBLÈME. — *Une plaque plane est sollicitée par des forces de traction appliquées à son contour, de manière que la contraction perpendiculaire à ses faces planes soit partout la même, tandis que chaque point du périmètre de la section médiane éprouve un dé-*

placement arbitraire assigné d'avance suivant la normale à la surface latérale de la plaque : trouver pour tous les points de la plaque les composantes de déformation et d'élasticité (Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, § XLI).

Je prendrai pour plan des coordonnées x, y la section médiane de la plaque et, en la supposant douée d'un centre, ce centre pour origine des coordonnées. Pour que la contraction λ_1 donnée par la première des expressions (26) soit constante, il faut qu'on ait

$$(28) \qquad \frac{d\Omega_1}{dx} + \frac{d\Omega_2}{dy} = a, \qquad N_1 = 0,$$

et, par suite des égalités (22) et (23),

$$(29) \qquad \frac{d\Omega_2}{dx} - \frac{d\Omega_1}{dy} = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = b,$$

en désignant par a et b deux constantes. Si, de plus, on suppose avec Clebsch que les composantes d'élasticité et de déformation doivent être symétriques par rapport à la section médiane, on aura de plus

$$K = \text{const.}$$

On satisfait généralement aux relations (28) et (29) en posant

$$(30) \quad \Omega_1 = \frac{d\Omega}{dx} + \frac{a}{2}x - \frac{b}{2}y, \quad \Omega_2 = \frac{d\Omega}{dy} + \frac{a}{2}y + \frac{b}{2}x,$$

où Ω désigne une fonction de x et de y qui vérifie l'équation

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} = 0,$$

et, par suite, on peut substituer aux formules (25) les suivantes :

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= -\frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\left[x\frac{d^2\Omega}{dx^2}+y\frac{d^2\Omega}{dx\,dy}\right] \\
&\quad +\frac{5\lambda+6\mu}{8(\lambda+\mu)}\frac{d\Omega}{dx}+\frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}ax-\frac{b}{2}y, \\
v &= -\frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\left[x\frac{d^2\Omega}{dx\,dy}+y\frac{d^2\Omega}{dy^2}\right] \\
&\quad +\frac{5\lambda+6\mu}{8(\lambda+\mu)}\frac{d\Omega}{dy}+\frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}ay+\frac{b}{2}x, \\
w &= -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}az+\text{const.}
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules se simplifient encore si l'on prend pour Ω une fonction Ω_ν homogène de degré ν, et si l'on observe qu'à l'origine des coordonnées on doit avoir les égalités suivantes (Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, § XXII),

$$
u=0,\qquad v=0,\qquad w=0,
$$
$$
\frac{dv}{dx}=0,\qquad \frac{dw}{dx}=0,\qquad \frac{dw}{dy}=0;
$$

il vient définitivement

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{8(\lambda+\mu)}\frac{d\Omega_\nu}{dx} \\
&\quad +\frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}ax-\frac{b}{2}y, \\
v &= \frac{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{8(\lambda+\mu)}\frac{d\Omega_\nu}{dy} \\
&\quad +\frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}ay+\frac{b}{2}x, \\
w &= -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}az,\qquad b=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{d^2\Omega_\nu}{dx\,dy}\right)_0.
\end{aligned}
\right.
$$

5. Dans le cas particulier d'une plaque circulaire, le moyen le plus simple de déterminer les composantes de déformation u, v, w conformément aux données du problème est d'employer les coordonnées semi-polaires. Si

l'on pose

$$(33)\qquad x = \rho\cos p,\qquad y = \rho\sin p,\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2},$$

il en résulte

$$\frac{d\Omega_\nu}{dx} = \cos p\,\frac{d\Omega_\nu}{d\rho} - \frac{\sin p}{\rho}\,\frac{d\Omega_\nu}{dp},$$

$$\frac{d\Omega_\nu}{dy} = \sin p\,\frac{d\Omega_\nu}{d\rho} + \frac{\cos p}{\rho}\,\frac{d\Omega_\nu}{dp}$$

et

$$(34)\qquad \frac{d^2\Omega_\nu}{dx^2} + \frac{d^2\Omega_\nu}{dy^2} = \frac{1}{\rho^2}\,\frac{d^2\Omega_\nu}{dp^2} + \frac{d^2\Omega_\nu}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d\Omega_\nu}{d\rho} = 0,$$

d'où, en faisant

$$(35)\qquad \Omega_\nu = \rho^\nu\varphi_\nu,$$

où φ_ν désigne une fonction de p, il résulte

$$(36)\qquad \rho^{\nu-2}\left[\frac{d^2\varphi_\nu}{dp^2} + \nu^2\varphi_\nu\right] = 0,$$

équation différentielle du second ordre dont la solution générale est

$$(37)\qquad \varphi_\nu = A_\nu\sin\nu p + B_\nu\cos\nu p$$

et

$$\frac{d\Omega_\nu}{dx} = \rho^{\nu-1}\left[\nu\cos p\,\varphi_\nu - \sin p\,\frac{d\varphi_\nu}{dp}\right],$$

$$\frac{d\Omega_\nu}{dy} = \rho^{\nu-1}\left[\nu\sin p\,\varphi_\nu + \cos p\,\frac{d\varphi_\nu}{dp}\right].$$

D'après cela il vient, pour tous les points du corps,

$$(38)\left\{\begin{aligned} u &= \frac{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{8(\lambda+\mu)}\,\rho^{\nu-1}\left[\nu\cos p\,\varphi_\nu - \sin p\,\frac{d\varphi_\nu}{dp}\right]\\ &\quad + \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\,a\rho\cos p - \frac{b}{2}\,\rho\sin p,\\ v &= \frac{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{8(\lambda+\mu)}\,\rho^{\nu-1}\left[\nu\sin p\,\varphi_\nu + \cos p\,\frac{d\varphi_\nu}{dp}\right]\\ &\quad + \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)}\,a\rho\sin p + \frac{b}{2}\,\rho\cos p,\\ w &= \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\,az.\end{aligned}\right.$$

et sur le contour de la plaque, en désignant par r le rayon de sa section médiane, et par N l'expression en fonction de p du déplacement normal à la surface latérale de la plaque,

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} & u\cos p + v\sin p \\ & \quad = \mathrm{N} = \sum_{\nu} \frac{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{8(\lambda+\mu)} \nu r^{\nu-1} \\ & \qquad \times [\mathrm{A}_\nu \sin\nu p + \mathrm{B}_\nu \cos\nu p] + \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} ar. \end{aligned}\right.$$

Comme on suppose la plaque pleine et non pas annulaire, les valeurs négatives de ν doivent être exclues, et l'on déterminera les coefficients A et B suivant la méthode habituelle, en posant

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_\nu &= \frac{8(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu} \frac{1}{\nu\pi r^{\nu-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{N}\sin\nu p\, dp, \\ \mathrm{B}_\nu &= \frac{8(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu} \frac{1}{\nu\pi r^{\nu-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{N}\cos\nu p\, dp, \end{aligned}\right.$$

formules à employer depuis $\nu = 1$ jusqu'à $\nu = \infty$. Quant à la détermination de a, on ne peut l'obtenir ainsi, mais elle est immédiate, car, si dans l'égalité (39) on fait $p = 0$, d'où il suit $\nu = 0$, il vient

$$(41)\quad \mathrm{N}_0 = \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} ar, \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \frac{\mathrm{N}_0}{r},$$

en désignant par N_0 le terme constant de l'expression de N en fonction de p.

La connaissance des coefficients A et B donnera φ_ν, et, à l'aide de cette fonction, on aura les valeurs de u, v, w pour tous les points du corps par les formules (38).

6. Pour arriver à la détermination des forces aptes à produire ces déplacements, il faut satisfaire pour tous les points de la surface latérale de la plaque aux équa-

tions

$$(42)\qquad \begin{cases} X = N_x \cos p + T_z \sin p, \\ Y = T_z \cos p + N_y \sin p. \end{cases}$$

Or, on a

$$N_x = \frac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}\frac{d^2\Omega_\nu}{dx^2} + \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a,$$

$$N_y = \frac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\nu}{4(\lambda+\mu)}\frac{d^2\Omega_\nu}{dy^2} + \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a,$$

$$T_z = \frac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}\frac{d^2\Omega_\nu}{dx\,dy},$$

et par suite il vient, en ayant égard aux égalités (33),

$$(43)\qquad \begin{cases} Xr = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}(\nu-1)\dfrac{d\Omega_\nu}{dx} \\ \qquad + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}ax, \\ Yr = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}(\nu-1)\dfrac{d\Omega_\nu}{dy} \\ \qquad + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}ay, \end{cases}$$

et, en passant aux coordonnées semi-polaires,

$$(44)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}(\nu-1)r^{\nu-2} \\ \qquad \times\left[\nu\cos p\,\varphi_\nu - \sin p\dfrac{d\varphi_\nu}{dp}\right] + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a\cos p, \\ Y = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}(\nu-1)r^{\nu-2} \\ \qquad \times\left[\nu\sin p\,\varphi_\nu + \cos p\dfrac{d\varphi_\nu}{dp}\right] + \dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a\sin p. \end{cases}$$

On peut ici observer avec Clebsch que, si l'on fait abstraction, dans les seconds membres des égalités (38) et (43), des termes où figure a, on a

$$(45)\qquad X = \mu\frac{du}{dr},\qquad Y = \mu\frac{dv}{dr},$$

ce qui permet de déduire les composantes de traction X et Y des composantes de déformation u et v. On a d'ailleurs

$$(46)\quad \left\{ \begin{aligned} D &= X\cos p + Y\sin p \\ &= \sum_{\nu} \frac{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}{4(\lambda+\mu)}\nu(\nu-1)r^{\nu-2} \\ &\quad\times[A_\nu\sin\nu p + B_\nu\cos\nu p] + \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a, \end{aligned} \right.$$

en désignant par D la composante de traction normale à la surface latérale de la plaque, et si on la suppose connue pour les points du contour, on pourra déterminer les coefficients A_ν et B_ν par les formules

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} A_\nu &= \frac{4(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\,\frac{1}{\nu(\nu-1)\pi r^{\nu-2}}\int_0^{2\pi} D\sin\nu p\,dp, \\ B_\nu &= \frac{4(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)-(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\,\frac{1}{\nu(\nu-1)\pi r^{\nu-2}}\int_0^{2\pi} D\cos\nu p\,dp. \end{aligned} \right.$$

Il faut observer, relativement à ces formules, qu'on ne peut les employer que depuis $\nu = 2$ jusqu'à $\nu = \infty$. On voit en effet, par les formules (43), que, pour $\nu = 1$, on a

$$(48)\quad X_1 = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a\cos p, \qquad Y_1 = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a\sin p,$$

et pour $\nu = 0$, il vient, par l'égalité (44),

$$(49)\qquad D_0 = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2(\lambda+\mu)}a,$$

en désignant par D_0 la partie constante de la composante normale de traction.
