G. FOURET

Sur deux déterminants numériques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 82-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__82_1>

SUR DEUX DÉTERMINANTS NUMÉRIQUES ;

PAR M. G. FOURET.

Certains déterminants numériques, d'une forme simple, présentent, quel que soit leur ordre, des valeurs remarquables. En voici deux exemples, qu'il nous a paru intéressant de faire connaître.

I. *Le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n$$

a, quel que soit son ordre n, une valeur égale à l'unité.

Désignons par X_n ce déterminant. Nous n'altérons pas sa valeur en retranchant des éléments de la première colonne les éléments correspondants de la seconde. On a par suite

$$X_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = X_{n-1};$$

c'est-à-dire

$$X_n = X_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. *Le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n$$

est nul ou égal à l'unité, suivant que son ordre n est impair ou pair (¹).

Désignons par Y_n ce déterminant. En retranchant les éléments de la seconde colonne des éléments correspon-

(¹) On sait d'ailleurs, d'une manière générale, que tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul.

dants de la première, on a encore

$$Y_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n$$

ou bien, en développant ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne,

$$Y_n = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1},$$

c'est-à-dire, d'après les notations que nous avons adoptées,

$$Y_n = - Y_{n-1} + X_{n-1}$$

ou encore, en vertu du premier théorème,

$$Y_n = - Y_{n-1} + 1.$$

Mais on a

$$Y_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

On en conclut, d'après la relation de récurrence trouvée,

$$Y_3 = 0, \qquad Y_4 = 1, \qquad Y_5 = 0, \qquad \dots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans une Note publiée en 1886 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XIV, p. 146), nous avons fait connaître la valeur de quelques autres déterminants numériques remarquables. Nous ajouterons que l'on trouve démontré, dans cette même Note, le second des deux théorèmes communiqués par M. J. Mouchel aux lecteurs des *Nouvelles Annales*, en août dernier, théorèmes qui ne diffèrent d'ailleurs entre eux que par la forme de l'énoncé. Nous rappellerons enfin que, dès 1846, M. Catalan s'était occupé de questions du même genre dans ses *Recherches sur les déterminants* (*Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, t. XIII, 2e Partie, p. 534).