

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École centrale en 1888. Première session

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 403-410

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__403_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Par un point quelconque M du plan des axes passent deux coniques de ce faisceau, réelles ou imaginaires :

1° *Déterminer les parties du plan dans lesquelles doit être le point M pour que les deux coniques du faisceau qui passent par ce point soient réelles, et celles où il doit être pour que les deux coniques soient imaginaires. (La ligne de séparation est de degré supérieur au second.)*

2° *Reconnaître, d'après la position d'un point par lequel passent deux coniques réelles, le genre de ces coniques.*

3° *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine des coordonnées à toutes les coniques du faisceau considéré.*

SOLUTION.

Soient α l'abscisse du foyer F correspondant à l'axe des y , e l'excentricité d'une des coniques du faisceau ; cette conique a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = e^2 x^2.$$

En écrivant qu'elle passe par le point A(a , 0), on a, pour déterminer α , l'équation

$$(a - \alpha)^2 = e^2 a^2;$$

d'où, en admettant que e est un nombre positif ou négatif,

$$\alpha = a(1 + e).$$

Remplaçant α par sa valeur, l'équation des coniques du faisceau s'écrit

$$(1) \quad (x - a - ae)^2 + y^2 = e^2 x^2.$$

1° Soient X, Y les coordonnées du point M. Substituons-les dans l'équation (1); nous aurons, pour déter-

miner les excentricités des coniques qui passent par ce point, l'équation

$$(X - a - ae)^2 + Y^2 = e^2 X^2$$

ou, en ordonnant par rapport à e ,

$$(2) \quad (X^2 - a^2)e^2 + 2a(X - a)e - [(X - a)^2 + Y^2] = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$a^2(X - a)^2 + (X^2 - a^2)[(X - a)^2 + Y^2] \geq 0$$

ou

$$(3) \quad (X - a)[X(X^2 + Y^2) - a(X^2 - Y^2)] \geq 0.$$

Le premier facteur change de signe quand le point M franchit la droite $X - a = 0$ menée par le point A parallèlement à l'axe des y , et le second facteur quand le point M franchit la strophoïde

$$X(X^2 + Y^2) - a(X^2 - Y^2) = 0,$$

symétrique par rapport à l'axe des x , ayant l'origine pour point double et pour tangentes en ce point les bissectrices des angles des axes, pour asymptote la droite $X + a = 0$, et passant par le point A. Or, dans l'intérieur de la boucle, l'inégalité est satisfaite; les régions hachurées sont donc celles où ne doit pas se trouver le point M, si l'on veut que les coniques soient réelles.

2° Si le point M est pris sur la droite $X - a = 0$, ailleurs qu'en A, l'équation (2) a une racine double infinie, F est à l'infini, et l'équation (1) se réduit à

$$x^2 - a^2 = 0,$$

c'est-à-dire aux deux droites BB' et DD'. Si le point M est en A, e est indéterminé, F aussi, ce qui devait être, puisque la conique (1) est déjà assujettie à passer par le point A, et qu'il n'y a plus que quatre conditions.

Si le point M est pris sur la strophoïde ailleurs qu'en

A, l'équation (2) a pour racine double $-\frac{a}{X+a}$. L'abscisse du point M étant comprise entre 0 et a , l'excentricité est comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, et l'on a deux ellipses confondues; le foyer F est compris entre O et le milieu I de AO. Le point M étant en O, $e = -1$, $\alpha = 0$, et la double conique se réduit à $y^2 = 0$. L'abscisse du point M étant comprise entre 0 et $-a$, l'excentricité est supérieure à 1, et l'on a deux hyperboles confondues. Enfin, le point M étant à l'infini sur la strophoïde, $e = -\infty$, $\alpha = -\infty$, et la double conique se réduit aux deux droites $x^2 - a^2 = 0$, c'est-à-dire à BB' et à DD'.

Si le point M est pris sur l'axe des x , ailleurs qu'en A et en O, l'équation (2) a pour racines -1 et $\frac{X-a}{X+a}$; l'une des coniques est toujours le double axe des x , et l'autre est une ellipse si X est positif, une hyperbole si X est négatif et différent de $-a$, le système des deux droites BB' et DD' si $X = -a$. La position du foyer, dont l'abscisse $\alpha = a \frac{2X}{X+a}$, s'obtient sans difficulté.

Si le point M est pris à droite de BB', en dehors de l'axe des x , on substitue à e , dans l'équation (2), pour séparer les racines,

$$-\infty, -1, 0, +1, +\infty,$$

et l'on obtient

$$+, \dots, -, 4aX - 4a^2 - Y^2, +.$$

L'équation (2) a donc une racine comprise entre $-\infty$ et -1 ; la conique correspondante est une hyperbole et l'abscisse α de son foyer F est négative.

Pour discuter l'autre racine, construisons la parabole

$$4aX - 4a^2 - Y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (X - 2a)^2 + Y^2 = X^2,$$

qui a pour directrice l'axe des y , pour foyer le symé-

trique O' de O par rapport à A et pour tangentes aux points situés sur la verticale de O' les tangentes en O à la strophoïde. Si le point M est à l'intérieur de cette parabole, $4aX - 4a^2 - Y^2$ est positif, et l'équation (2) a une racine comprise entre 0 et 1; la conique correspondante est une ellipse, et son foyer F est compris entre A et O' . Si le point M est à l'extérieur de cette parabole, $4aX - 4a^2 - Y^2$ est négatif, et l'équation (2) a une racine comprise entre 1 et $+\infty$; la conique correspondante est une hyperbole, et son foyer F est au delà de O' . Enfin, si le point M est sur la parabole, ailleurs qu'en A , l'équation (2) a une racine égale à 1; et la conique correspondante, comme cela était évident, est la parabole elle-même.

Si le point M est pris dans la boucle de la strophoïde, en dehors de l'axe des x , les substitutions précédentes donnant toutes des résultats négatifs, on substitue la demi-somme des racines $-\frac{a}{X+a}$, qui est comprise entre -1 et 0; on obtient

$$-\frac{X(X^2 + Y^2) - a(X^2 - Y^2)}{X + a}.$$

L'inégalité (3) montre que, à l'intérieur de la boucle, le numérateur est négatif, et, comme le dénominateur est positif, ce résultat est positif, et l'équation (2) a une racine comprise entre -1 et $-\frac{a}{X+a}$, et une entre $-\frac{a}{X+a}$ et 0; les coniques correspondantes sont deux ellipses et leurs foyers sont compris entre O et A .

Si le point M est pris à gauche de la strophoïde et à droite de DD' , en dehors de l'axe des x , les premières substitutions donnant toutes des résultats négatifs, on substitue encore la demi-somme des racines $-\frac{a}{X+a}$,

qui est comprise ici entre $-\infty$ et -1 ; on obtient, comme tout à l'heure,

$$-\frac{X(X^2 + Y^2) - a(X^2 - Y^2)}{X + a}.$$

L'inégalité (3) montre que le numérateur est négatif, et, comme le dénominateur est positif, ce résultat est positif, et l'équation (2) a une racine comprise entre $-\infty$ et $-\frac{a}{X+a}$, et une entre $-\frac{a}{X+a}$ et -1 ; les coniques correspondantes sont deux hyperboles et leurs foyers sont à gauche de O.

Si le point M est pris sur DD', ailleurs qu'en C, l'équation (2) a une racine infinie et une racine égale à $-\frac{4a^2 + Y^2}{4a^2}$; les coniques correspondantes sont le système des deux droites BB' et DD' et une hyperbole dont le foyer F a pour abscisse $-\frac{Y^2}{4a}$.

Si le point M est pris à gauche de DD', en dehors de l'axe des x , il n'y a plus qu'à faire les premières substitutions, et l'on obtient

$$+, -, -, -, -.$$

L'équation (2) a donc une racine comprise entre $-\infty$ et -1 et une entre 1 et $+\infty$; les coniques correspondantes sont deux hyperboles. L'abscisse du foyer F de l'une est négative, celle du foyer F de l'autre est supérieure à $2a$.

Nous avons vu que la conique (1) se réduisait à un système de deux droites pour $e = \infty$ et pour $e = -1$, c'est-à-dire lorsque le point M était pris sur BB', ou sur DD', ou sur l'axe des x . Pour voir s'il n'y aurait pas d'autres cas, formons Δ ; on a

$$\Delta = -a^2 e^2 (1 - e)^2.$$

qui donne encore la solution $e = 0$. La conique (1) correspondante est le système des deux droites imaginaires $(x - a)^2 + y^2 = 0$, qui se coupent en A, et le point correspondant M est un point quelconque de ces droites.

Pour que la conique (1) soit un cercle, il faut que $e = 0$; c'est la solution précédente.

Pour que ce soit une hyperbole équilatère, il faut que $e = \pm\sqrt{2}$, c'est-à-dire, en substituant dans l'équation (2), que le point M soit sur l'une des deux hyperboles équilatères

$$(E) \quad X^2 - Y^2 + 2a(1 \pm \sqrt{2})X - a^2(1 \pm \sqrt{2})^2 = 0,$$

qui est alors l'une des coniques passant par le point M. Ces deux hyperboles ont l'axe des x pour axe, le point A pour sommet, et leurs asymptotes parallèles aux bissectrices des angles des axes; les abscisses des centres sont $-a(1 \pm \sqrt{2})$, et celles des foyers F, $a(1 \pm \sqrt{2})$. Elles sont bitangentes à la strophoïde : la première en deux points dont les abscisses sont $-a \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ et dont les ordonnées, $\pm a \sqrt{\frac{-8\sqrt{2} - 11}{2}}$, sont imaginaires; la seconde en deux points dont les abscisses sont $-a \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ et dont les ordonnées, $\pm a \sqrt{\frac{8\sqrt{2} - 11}{2}}$, sont réelles et égales à $\pm \frac{a}{3}$ environ.

3° Les points de contact des tangentes menées de l'origine à toutes les coniques du faisceau sont, à l'intersection de ces coniques et de la polaire de l'origine par rapport à elles :

$$(4) \quad (1 + e)(x - a - ae) = 0.$$

En éliminant e entre les équations (1) et (4), on a

l'équation du lieu. La solution $e = -1$ donne $y^2 = 0$, ce qui doit être; et l'autre solution, $e = \frac{x-a}{a}$, donne

$$a^2 y^2 = x^2(x-a)^2 \quad \text{ou} \quad x(x-a) = \pm ay,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(y \pm \frac{a}{2}\right)^2.$$

Le lieu se compose donc de deux paraboles qui se coupent à angle droit au point A et à l'origine, où les tangentes sont les bissectrices des angles des axes; elles ont pour foyer commun le point I et pour directrices les droites $y \pm \frac{a}{2} = 0$. Elles sont osculatrices à l'origine à la strophoïde qu'elles traversent; car, en cherchant l'équation aux abscisses des points de rencontre des deux courbes, on trouve

$$x^4(x-a) = 0.$$

Enfin, elles rencontrent la parabole $y^2 = 4ax - 4a^2$ et les deux hyperboles équilatères (E) aux points de contact avec ces courbes des tangentes issues de O, comme cela résulte de la définition même du lieu. C. B.