Nouvelles annales de mathématiques

M. D'Ocagne

Quelques propriétés générales des courbes algébriques obtenues au moyen des coordonnées parallèles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 445-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__445_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES OBTENUES AU MOYEN DES COORDONNÉES PARALLÈLES (1);

PAR M. M. D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. L'équation générale des courbes algébriques est, en coordonnées parallèles,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_n v^n + (a_{n-1}u + b_{n-1})v^{n-1} + \ldots \\ \qquad + (a_0 u^n + b_0 u^{n-1} + \ldots + l_0) = 0. \end{array}\right.$$

Si donc nous donnons à u une valeur particulière, nous avons, entre les n valeurs correspondantes de v, les relations évidentes

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}u - \frac{b_{n-1}}{a_n},$$

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{du} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2 v_i}{du^2} = 0,$$

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_i - u\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{du} = -\frac{b_{n-1}}{a_n}.$$

L'interprétation géométrique de ces relations algé-

(1) *Voir*, au sujet de ces coordonnées, les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884) ou la brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars; 1885).

briques va nous donner autant de propriétés des courbes représentées par (1).

2. Rappelons d'abord que le point de contact P de la tangente (u, v) a pour équation

$$\mathrm{U}\,dv - \mathrm{V}\,du - (u\,dv - v\,du) = 0.$$

Il en résulte que, si cette tangente coupe l'axe Au au point M et l'axe Bv au point N, on a

$$\frac{dv}{du} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PM}}, \tag{6}$$

et que, si AP coupe l'axe Bv au point β,

$$v - u\frac{dv}{du} = \mathrm{B}\beta. \tag{7}$$

D'autre part, le rayon de courbure au point P est donné par

$$\mathrm{R} = \frac{\dfrac{d^2v}{du^2}}{\left(1 - \dfrac{dv}{du}\right)^3}\,\frac{\overline{\mathrm{NM}}^3}{\delta},$$

en appelant δ la distance AB, supposée ici perpendiculaire à Au et Bv. Or la formule (6) donne

$$1 - \frac{dv}{du} = 1 - \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{PM}}.$$

Par suite,

$$\mathrm{R} = \frac{d^2v}{du^2}\,\frac{\overline{\mathrm{PM}}^3}{\delta}$$

et

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{\mathrm{R}\,\delta}{\overline{\mathrm{PM}}^3}. \tag{8}$$

3. Cela posé, remarquons que prendre u comme variable indépendante revient à mener à la courbe (1) les

tangentes $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ par un point M variable sur Au.

Dès lors, la formule (1) exprime que, si ces tangentes rencontrent $B\nu$ en $N_1, N_2, \ldots, N_n$, la droite qui joint le point M au centre des moyennes distances des points $N_1, N_2, \ldots, N_n$ passe par un point fixe. Or cette droite est ce que nous avons appelé la *droite moyenne* (¹) des droites $MN_1, MN_2, \ldots, MN_n$ relativement à la direction Au. C'est encore la polaire du point situé à l'infini dans cette direction par rapport à ce faisceau de droites, ou la conjuguée harmonique de Au par rapport à ce faisceau. Donc :

La conjuguée harmonique de l'axe Au *par rapport aux tangentes menées à une courbe algébrique quelconque par un point variable sur cet axe passe par un point fixe.*

4. Par les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, menons à Au des parallèles qui coupent AB en $p_1, p_2, \ldots, p_n$. D'après la formule (6),

$$\frac{p_i B}{p_i A} = \frac{d\nu_i}{du}.$$

La formule (3) donne donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i B}{p_i A} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

ou, puisque

$$\frac{p_i B}{p_i A} = \frac{p_i A - BA}{p_i A} = 1 - \frac{\delta}{p_i A},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{p_i A} = \frac{1}{\delta}\left(n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, p. 114; 1884, et *Nouvelles Annales*, p. 413; 1884.

Le second membre étant constant, on voit que :

Le conjugué harmonique du point A *par rapport aux points* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *est un point fixe.*

5. Si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont les points où l'axe $B\nu$ est coupé par $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$, la formule (7) donne

$$v_i - u\frac{dv_i}{du} = B\beta_i.$$

La formule (5) devient donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} B\beta_i = -\frac{b_{n-1}}{a_n};$$

c'est-à-dire que :

La conjuguée harmonique de Au, *par rapport aux droites* $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$, *est une droite fixe.*

Cette propriété généralise la précédente.

Enfin la formule (8) montre que

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{\overline{MP}_i^3} = 0, \tag{9}$$

d'où ce théorème remarquable :

Théorème I. — *Si l'on mène d'un point les* n *tangentes à une courbe algébrique de la classe* n, *la somme des rayons de courbure répondant aux points de contact divisés respectivement par les cubes des tangentes correspondantes est nulle.*

Le signe des divers éléments de cette somme se détermine facilement par la remarque que voici : Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_n$ étant les centres de courbure répondant à $P_1, P_2, \ldots, P_n$, faisons tourner les triangles $MP_1\Omega_1$,

$MP_2\Omega_2, \ldots, MP_n\Omega_n$ autour de M, de façon à diriger $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ suivant une même droite et *dans le même sens*. Un certain nombre des points $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ seront alors au-dessus de cette droite, les autres au-dessous, et l'on donnera des signes opposés, d'une part, aux quantités $\frac{R_i}{\overline{MP_i}^3}$ correspondant aux premiers, de l'autre, aux mêmes quantités correspondant aux seconds.

Ce théorème ne nous semble avoir été remarqué jusqu'ici que dans le cas des coniques. Sa démonstration, par les coordonnées cartésiennes, dans le cas général, présenterait de sérieuses difficultés.

6. Faisant maintenant abstraction du système spécial de coordonnées, au moyen duquel nous avons obtenu les résultats précédents, nous pourrons énoncer le premier et le troisième d'entre eux sous la forme que voici, le second n'étant qu'un cas particulier du troisième :

Théorème II. — *Étant donnés une courbe algébrique* C, *une droite* D *et un point* A *sur cette droite, si d'un point* M *variable sur la droite* D, *on mène à la courbe* C *les tangentes* $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$:

1° *La conjuguée harmonique de la droite* D, *par rapport à ces tangentes, passe par un point fixe;*

2° *La conjuguée harmonique de la droite* D, *par rapport aux droites qui joignent le point* A *aux points de contact* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *est une droite fixe.*

7. Voyons ce que deviennent ces divers théorèmes dans le cas de tangentes parallèles. Pour le théorème I, remarquons que, dans chaque élément de la somme, $\frac{R_i}{\overline{MP_i}^3}$, MP_i devient infini; mais la formule (9), par la-

quelle se traduit le théorème, peut s'écrire

$$R_1 + R_2\left(\frac{MP_1}{MP_2}\right)^3 + \ldots + R_n\left(\frac{MP_1}{MP_n}\right)^3 = 0.$$

Du point M, comme centre, avec MP_1 pour rayon, décrivons un cercle qui coupe MP_2 en $Q_2, \ldots, MP_n$ en Q_n. La formule précédente pourra s'écrire

$$R_1 + R_2\left(1 + \frac{P_2Q_2}{MP_2}\right)^3 + \ldots + R_n\left(1 + \frac{P_nQ_n}{MP_n}\right)^3 = 0.$$

Or, lorsque M s'éloigne à l'infini, $Q_2, \ldots, Q_n$ tendent respectivement vers les pieds des perpendiculaires abaissées de P_1 sur les tangentes en $P_2, P_3, \ldots, P_n$. Il en résulte que $P_2Q_2, P_3Q_3, \ldots, P_nQ_n$ restent finis alors que $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ croissent indéfiniment. La limite de chacun des rapports $\frac{P_iQ_i}{MP_i}$ est donc zéro, et l'on a, pour le cas des tangentes parallèles,

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i = 0.$$

On retrouve ainsi un théorème remarqué par Duhamel.

8. Pour le théorème II, rejetons la droite D à l'infini, le point A se trouvant alors dans une direction donnée; la direction de la droite D est alors arbitraire, et nous voyons que les diverses parties du théorème s'énoncent ainsi :

1° *La droite moyenne, par rapport à une direction quelconque des tangentes à une courbe algébrique, parallèles entre elles, passe par un point fixe.*

2° *La droite moyenne, par rapport à une direction quelconque* Δ, *des parallèles à une autre direction* *quelconque Δ′ menées par les points de contact de ces tangentes, est fixe.*

La droite moyenne dont il est question dans ce dernier énoncé passe évidemment par le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles. Puisqu'elle est fixe, quelle que soit sa direction Δ', c'est donc que ce dernier point est fixe. On tombe ainsi sur ce théorème de Chasles :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes à une courbe algébrique, parallèles à une direction donnée, est fixe quelle que soit cette direction.

Il est tout naturel de donner à ce point fixe le nom de *point de Chasles* de la courbe algébrique considérée.

La démonstration directe de ce dernier théorème, avec la détermination analytique du point de Chasles, se fait très simplement au moyen des coordonnées parallèles : c'est ce que nous allons faire voir maintenant [1].

9. Les tangentes à la courbe représentée par l'équation (1), parallèles à une direction donnée, s'obtiennent en adjoignant à cette équation la suivante

$$v - u = s, \tag{10}$$

où s caractérise la direction choisie. Le centre des moyennes distances de leurs n points de contact a pour

---

[1] Les démonstrations suivantes ont été communiquées verbalement à la *Société mathématique de France* (séance du 8 janvier 1890).

équation [1]

$$(11)\qquad u\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dv_i}{dv_i-du_i}-v\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{dv_i-du_i}-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{u_i\,dv_i-v_i\,du_i}{dv_i-du_i}=0.$$

Or, s ayant la même valeur pour les n points de contact, on voit, d'après (2), que

$$(11\,bis)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dv_i}{dv_i-du_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i+ds}{ds}=n+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{dv_i-du_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{u_i\,dv_i-v_i\,du_i}{dv_i-du_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{u_i\,ds-s\,du_i}{ds}\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{i=n}u_i-s\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds}.
\end{aligned}\right.$$

Mais l'équation en u et s obtenue par l'élimination de v entre (1) et (10) est de la forme

$$(12)\qquad A_n u^n+(A_{n-1}s+B_{n-1})\,u^{n-1}+\ldots=0.$$

Par suite,

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n}u_i=-\frac{A_{n-1}}{A_n}\,s-\frac{B_{n-1}}{A_n},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds}=-\frac{A_{n-1}}{A_n},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}u_i-s\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds}=-\frac{B_{n-1}}{A_n}.
\end{aligned}\right.$$

---

[1] *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 86, note II.

L'équation (11) devient donc, en tenant compte de (11) et (13),

$$(14)\qquad (n\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1})\,u + \mathrm{A}_{n-1}\,v + \mathrm{B}_{n-1} = 0,$$

et, comme ses coefficients sont constants, *le théorème de Chasles est démontré.*

10. Nous allons maintenant calculer ces coefficients au moyen de ceux de l'équation (1). Celle-ci peut s'écrire, en groupant les termes de même degré,

$$(1')\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + a_2 u_{n-2} v^2 + \ldots + a_n v^n \\ \qquad + b_0 u^{n-1} + b_1 u^{n-2} v + \ldots + b_{n-1} v^{n-1} \\ \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + l_0 \end{array}\right\} = 0.$$

Remplaçant dans cette équation v par $u + s$, et mettant le polynôme obtenu sous la forme (12), on voit que

$$(15)\qquad \mathrm{A}_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$(16)\qquad \mathrm{A}_{n-1} = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n,$$

$$(19)\qquad \mathrm{B}_{n-1} = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}.$$

De (15) et (16) on déduit encore

$$(18)\qquad n\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1} = na_0 + (n-1)\,a_1 + \ldots + a_1.$$

Si nous représentons par $\varphi_n(u, v)$ et $\varphi_{n-1}(u, v)$ les ensembles homogènes des termes de degré n et de degré $n - 1$ dans (1'), les formules (16), (17), (18) pourront s'écrire

$$\mathrm{A}_{n-1} = \varphi'_{n_v}(1,1),$$

$$\mathrm{B}_{n-1} = \varphi_{n-1}(1,1),$$

$$n\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1} = \varphi'_{n_u}(1,1).$$

Dès lors, l'équation (14) du point de Chasles devient

$$(19) \qquad u\varphi'_{n_u}(1,1) + v\,\varphi'_{n_v}(1,1) + \varphi_{n-1}(1,1) = 0.$$

Elle est, sous cette forme, d'une remarquable simplicité et peut être étendue à l'espace.

11. Nous donnerons, pour terminer, la démonstration directe du théorème de Chasles en coordonnées axiales.

Nous avons remarqué ([1]) que, dans ce système de coordonnées, l'équation la plus générale d'une courbe algébrique (supposée de la classe n) est

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^n a_n \operatorname{tang}^n \theta \\ \quad + \lambda^{n-1}(a_{n-1} \operatorname{tang}^n \theta - b_{n-1} \operatorname{tang}^{n-1} \theta) + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

De plus, si l'on prend l'axe du système pour axe Ox, l'axe Oy étant la perpendiculaire menée à celui-ci par l'origine, les coordonnées x_i, y_i du point de contact de la tangente (λ_i, θ) sont données par ([2]),

$$x_i = \sin^2\theta \frac{d\lambda_i}{d\theta}, \qquad y_i = \lambda_i + \sin\theta \cos\theta \frac{d\lambda_i}{d\theta}.$$

Par suite, les coordonnées x et y du centre des moyennes distances des points de contact des n tangentes parallèles à la direction θ sont données par

$$(21) \quad nx = \sin^2\theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta}, \qquad ny = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i + \sin\theta\cos\theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta}.$$

([1]) *Coordonnees parallèles et axiales*, p. 89.
([2]) *Ibid.*, p. 41.

Or l'équation (20) donne

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_n}\cot\theta,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta} = \frac{b_{n-1}}{a_n}\frac{1}{\sin^2\theta},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i + \sin\theta\cos\theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Les formules (21) deviennent donc

(22) $$nx = \frac{b_{n-1}}{a_n}, \qquad ny = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

et, comme ces coordonnées sont constantes, le théorème est démontré.