Nouvelles annales de mathématiques

S. Ravier

Intersection d'une droite avec un hyperboloïde de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 29-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__29_1>

INTERSECTION D'UNE DROITE AVEC UN HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. S. RAVIER,
Élève du lycée Condorcet.

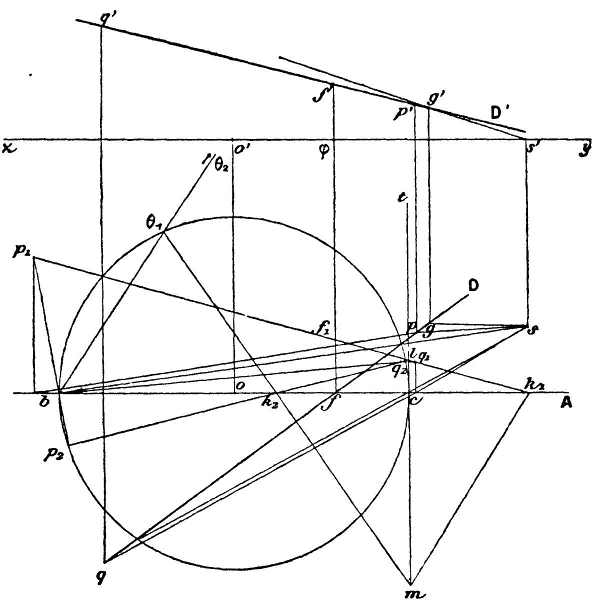
PREMIER CAS. — *La projection de la droite sur le plan du cercle de gorge rencontre ce cercle.*

Soit (o, o') (*fig.* 1) le centre du cercle de gorge, et

(D, D′) la droite. Menons, par la verticale *o*, un plan arbitraire *o*A (dans la figure il est de front, mais cela n'est pas nécessaire).

Ce plan *o*A coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole ayant pour sommets *b* et *c*, et dont l'angle des asymptotes est l'angle au sommet du cône asymptote de l'hyperboloïde.

Fig. 1.



Cette hyperbole, et l'hyperbole de section de l'hyperboloïde par le plan vertical D, déterminent deux cônes. On a construit le sommet (s, s') de l'un d'eux.

Nous sommes amenés à trouver l'intersection de la droite (D, D′) avec le cône correspondant.

Projetons, de (s, s'), la droite (D, D′) sur le plan vertical *o*A, puis rabattons ce plan autour de l'horizontale *o*A sur le plan du cercle de gorge [sur la figure, les deux points de D pour lesquels on a effectué ce rabattement sont : 1° le point de rencontre (f, f') de (D, D′) avec le plan vertical oA ; il se rabat en f_1 tel que $ff_1 = \varphi f'$; 2° le point à l'infini de (D, D′) qui donne la direction $s'g'$ du rabattement $f_1 k_1$].

Nous sommes amenés à chercher les points de rencontre d'une droite $f_1 k_1$ et d'une hyperbole dont on connaît les sommets b, c et l'angle des asymptotes.

Pour cela, on remarque que le cercle de gorge et l'hyperbole sont homologiques, b étant le centre d'homologie, et la tangente en c l'axe. D'ailleurs, pour avoir deux points homologues, il suffit de mener par b une parallèle à l'une des asymptotes (dans la figure, elle est parallèle à l'une des génératrices de contour apparent du cône asymptote; quelle que soit, du reste, la disposition de l'épure, elle fait avec bc un angle connu). Le second point de rencontre θ_1 de cette droite avec le cercle de gorge, et le point à l'infini sur elle, θ_2, sont homologues. Alors on applique une construction connue pour obtenir l'homologue lk_2 de la droite $f_1 lk_1$. On prend les points de rencontre p_2, q_2 de lk_2 avec le cercle de gorge. On construit leurs homologues p_1, q_1 sur $f_1 lk_1$, on relève ces homologues sur (D, D′); (p, p') et (q, q') sont les points de rencontre cherchés.

Remarquons qu'aucune des constructions que nous avons effectuées n'était nécessaire, et qu'on pourra toujours les modifier de manière à les amener dans les limites de l'épure. Remarquons aussi que nous n'avons eu besoin de tracer aucun cercle autre que le cercle de gorge.

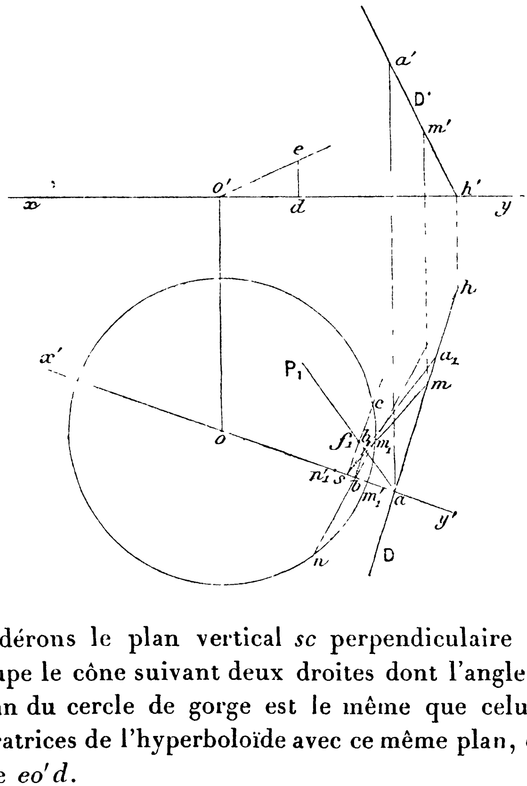
Second cas. — *La projection de la droite sur le plan du cercle de gorge ne rencontre pas ce cercle.*

Coupons l'hyperboloïde par le plan vertical D (*fig.* 2). La section est une hyperbole le long de laquelle est circonscrit à la surface un cône K ayant pour sommet s le pôle de D par rapport au cercle de gorge.

Ce cône coupe le cylindre vertical ayant pour base le cercle de gorge suivant deux courbes planes.

Pour obtenir le plan de l'une de ces courbes planes,

Fig. 2.



considérons le plan vertical sc perpendiculaire à os. Il coupe le cône suivant deux droites dont l'angle avec le plan du cercle de gorge est le même que celui des génératrices de l'hyperboloïde avec ce même plan, c'est-à-dire $eo'd$.

On en déduit que, si l'on construit le triangle rectangle ayant pour angle aigu $eo'd$ et pour côté de l'angle droit $o'd = sc$, ed est la hauteur du point de rencontre du cône K avec la verticale c au-dessus du plan du cercle de gorge.

Portons de en sf_1 sur sc, DaP_1 sera, dans le système $x'y'$, le plan de l'une des courbes planes communes au cône et au cylindre.

On peut alors regarder le cône K comme défini par une conique située dans le plan DaP_1 et ayant comme projection sur le plan horizontal le cercle de gorge. On cherchera les points d'intersection de la droite (D, D′) avec le cône ainsi défini.

Les constructions se continuent sans difficulté par la méthode habituelle.

Remarque. — Les deux méthodes exposées s'appliquent, avec des modifications de détail qu'il est facile de voir, à un hyperboloïde non de révolution.