MARCHAND

Remarques sur le problème de mécanique proposé à l'agrégation en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 321-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__321_0>

REMARQUES SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ A L'AGRÉGATION EN 1889;

PAR M. MARCHAND.

Les équations de Lagrange permettent évidemment de résoudre analytiquement toutes les questions que l'on traite habituellement par les formules du mouvement relatif. Voici en particulier comment elles peuvent remplacer les formules de Rivals et de Coriolis pour la mise en équations du problème de l'agrégation.

Désignant par ξ, η, ζ les coordonnées par rapport aux axes fixes, par x, y, z les coordonnées par rapport aux axes mobiles adoptés par M. de Saint-Germain, les formules de Lagrange s'écriront

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z, t), \\ \eta &= \psi(x, y, z, t), \qquad \mathrm{T} = \frac{m}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2), \\ \zeta &= \varpi(x, y, z, t), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos a,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos b,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos c.$$

On est ramené à exprimer T ou, ce qui revient au même, le carré de la vitesse du point mobile, en fonction de x, y, z, x', y', z'. Le carré de la vitesse étant la somme des carrés de ses projections sur les trois axes mobiles, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}[(x' + qz - ry)^2 + (y' + rx - pz)^2 + (z' + py - qx)^2].$$

Comme, dans le problème actuel,

$$m = 1, \qquad p = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{\omega}{\sqrt{3}},$$

il vient

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{\omega y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right)^2\right],$$

et les équations de Lagrange donnent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{\omega y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right) = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos a,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right) + \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{\omega y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right) = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos b,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right) + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right) = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos c.$$

Il n'y a qu'à réduire pour retrouver les formules (2) de M. de Saint-Germain.