Nouvelles annales de mathématiques

Astor

Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 276-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__276_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES UNICURSALES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. ASTOR,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

I. On sait que si les tangentes à une cubique unicursale en son point double sont réelles, la courbe n'a qu'un point d'inflexion réel, et qu'elle en a trois si le point double est un point isolé. Cette propriété peut être mise très simplement en évidence par un procédé tout à fait élémentaire.

Nous écarterons le cas simple où le point double est un point de rebroussement, c'est-à-dire que nous supposerons les tangentes distinctes.

Prenons pour origine le point double et pour axes deux droites réelles formant avec les tangentes un faisceau harmonique. Si nous voulons que les axes soient rectangulaires, il suffira de prendre les bissectrices de l'angle des tangentes. L'équation de la courbe sera de la forme

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = x^2 - K^2y^2,$$

K^2 étant positif si les tangentes sont réelles, négatif si elles sont imaginaires. Posons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x - Ky &= X, \\ x + Ky &= Y; \end{aligned} \right.$$

l'équation prend la forme

$$aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 = XY.$$

Coupons par la droite $Y = tX$; X et Y s'exprimeront par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{t}{a + bt + ct^2 + dt^3}, \\[2ex] Y = \dfrac{t^2}{a + bt + ct^2 + dt^3}; \end{cases}$$

et les formules (1) donneraient x et y rationnellement en fonction de t; nous appellerons, pour abréger, le point donné par les formules (2) le point t.

L'équation de la corde qui joint deux points t, t' s'écrit

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ t & t^2 & a + bt + ct^2 + dt^3 \\ t' & t'^2 & a + bt' + ct'^2 + dt'^3 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en effectuant et divisant par $t - t'$,

$$(3)\qquad \begin{cases} [a(t + t') + btt' - dt^2 t'^2]X \\ \quad + [-a + ctt' + dtt'(t + tt')]Y - t^2 = 0; \end{cases}$$

pour avoir la tangente au point t, il suffit de faire dans (3) $t' = t$: on obtient

$$(4)\qquad (2at + bt^2 - dt^4)X + (-a + ct^2 + 2dt^3)Y - t^2 = 0.$$

Les points θ de rencontre de la droite (4) avec la courbe seront fournis par l'équation

$$(2at + bt^2 - dt^4)\theta + (-a + ct^2 + 2dt^3)\theta^2 \\ - t^2(a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3) = 0;$$

cette équation doit admettre la solution double $\theta = t$, ce que l'on vérifie aisément en ordonnant son premier membre par rapport à a, b, c, d, et divisant par $(\theta - t)^2$;

il reste l'équation

$$a + dt^2\theta = 0. \tag{5}$$

Pour que le point t soit un point d'inflexion, il faut et il suffit que la valeur de θ donnée par (5) soit égale à t; c'est-à-dire que les points d'inflexion soient donnés par l'équation

$$a + dt^3 = 0. \tag{6}$$

On vérifie d'abord bien aisément que ces trois points sont en ligne droite; car si nous coupons la courbe par la droite

$$mX + nY + p = 0,$$

les coordonnées t des points de rencontre satisfont à l'équation

$$mt + nt^2 + p(a + bt + ct^2 + dt^3) = 0, \tag{7}$$

et l'on identifiera (6) et (7) en posant

$$m + pb = 0, \qquad n + pc = 0,$$

c'est-à-dire que les trois points d'inflexion sont sur la droite

$$bX + cY - 1 = 0$$

ou

$$(b + c)x + K(c - b)y = 1. \tag{8}$$

Or, si l'on forme les expressions des coefficients a, b, c, d, on trouve

$$\left\{\begin{aligned}
8a &= A - \frac{B}{K} + \frac{C}{K^2} - \frac{D}{K^3},\\
8b &= 3A - \frac{B}{K} - \frac{C}{K^2} + \frac{3D}{K^3},\\
8c &= 3A + \frac{B}{K} - \frac{C}{K^2} - \frac{3D}{K^3},\\
8d &= A + \frac{B}{K} + \frac{C}{K^2} + \frac{D}{K^3},
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

c'est-à-dire que si K^2 est < 0, a et d, b et c, sont deux à deux imaginaires conjugués, et l'équation (8) devient

$$(10) \qquad \left(3A - \frac{C}{K^2}\right)x + \left(B - \frac{3D}{K^2}\right)y = 4,$$

équation d'une droite toujours réelle si la cubique elle-même est réelle, comme on devait s'y attendre.

Si K^2 est > 0, l'équation (6) n'a qu'une racine réelle et comme les formules (2) ne donnent dans ce cas des points réels que pour des valeurs réelles de t, un seul point d'inflexion est réel.

Si K^2 est < 0, remplaçons K par Ki, alors a et d sont imaginaires conjugués, de sorte que leur quotient est une imaginaire de module égal à 1. Si nous posons

$$-\frac{a}{d} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha,$$

les trois racines de (6) seront

$$\cos\alpha + i\sin\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right),$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right).$$

L'équation $Y = tX$ revient à

$$K\frac{y}{x} = i\,\frac{1-t}{1+t};$$

formons la valeur du second membre pour

$$t = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

par exemple ; ce sera

$$i\,\frac{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha} = i\tan\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$= -i^2\tan\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\alpha}{2};$$

de sorte que les trois droites joignant le point double aux points d'inflexion sont réelles, et il en est de même des points d'inflexion dont nous aurons individuellement les coordonnées.

II. L'équation (5) peut être envisagée à un autre point de vue qui permet d'en déduire quelques conséquences intéressantes. Supposons que du point θ pris sur la courbe on veuille lui mener les deux tangentes distinctes de celle qui a son point de contact en θ et qui correspond à la racine double supprimée; les deux points de contact ont leurs coordonnées t et t' données par l'équation (5), d'où l'on déduit

$$t + t' = 0, \qquad tt' = \frac{a}{d\theta},$$

et l équation de la corde qui joint ces deux points de contact s'obtiendra en remplaçant dans (3) $t + t'$ et tt' par ces valeurs. Elle sera donc, après simplification,

$$(b\theta - a)\,X + \theta\,(c - d\theta)\,Y - \theta = 0:$$

on peut l'écrire

$$(11) \qquad aX - (bX + cY - 1)\,\theta + dY\theta^2 = 0,$$

et l'on voit qu'elle enveloppe la conique

$$(12) \qquad (bX + cY - 1)^2 - 4adXY = 0$$

quand le point d'où l'on mène les tangentes parcourt la courbe. Cette conique est inscrite à l'angle formé par les tangentes au point double, aux points où elles sont coupées par la droite des inflexions. Si les tangentes sont les droites isotropes, le point double, qui est alors un foyer de la cubique, est aussi un foyer de la conique et la droite des inflexions est la directrice correspondante.

La conique (12) sera une parabole si l'on a

$$ad\,(bc - ad) = 0.$$

Comme ad ne peut être nul, la cubique étant supposée indécomposable, on doit avoir

$$bc - ad = 0,$$

ou, en remplaçant a, b, c, d par leurs valeurs et simplifiant,

$$\text{(13)} \qquad A^2 - \frac{AC}{K^2} + \frac{BD}{K^4} - \frac{D^2}{K^6} = 0.$$

Cette relation (13) exprime, comme il est facile de le voir, que deux des directions asymptotiques déterminées par l'équation

$$Ax^3 + Bx^2y + Cx^2y + Dy^3 = 0$$

et les tangentes

$$x^2 - K^2y^2 = 0.$$

forment un faisceau harmonique; mais cela se voit encore plus simplement comme conséquence de la relation sous la forme

$$ad - bc = 0.$$

Écrivons en effet cette dernière

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \lambda$$

d'où

$$c = a\lambda, \qquad d = b\lambda:$$

l'équation de la courbe devient

$$(aX + bY)(X^2 + \lambda Y^2) = XY,$$

ce qui démontre la proposition.

On a donc ce théorème général :

Si dans une cubique unicursale les tangentes au point double et deux directions asymptotiques forment un faisceau harmonique, la corde polaire d'un point de la cubique enveloppe une parabole inscrite à l'angle des tangentes aux points où elles sont coupées par la droite des inflexions.

Nous pouvons remarquer en passant que, si nous connaissons les rapports de trois des quantités A, B, C, D à la quatrième, c'est-à-dire les directions asymptotiques de la courbe, nous pourrons déterminer K^2 par l'équation (13) de façon que la conique (12) soit une parabole, et la forme de l'équation montre qu'il y aura toujours une valeur réelle pour K. Si l'on multiplie A, B, C, D par un facteur arbitraire λ, on obtiendra une infinité de courbes homothétiques qui jouissent de la même propriété. Les paraboles qui leur correspondent sont également homothétiques.

Quelques cas particuliers sont intéressants à examiner.

1° Les tangentes sont rectangulaires, ou $K^2 = 1$; la relation (13) devient

$$A(A-C) + D(B-D) = 0. \tag{14}$$

Prenons, comme nous pouvons toujours le faire, l'axe des y parallèle à une direction asymptotique, car il y en a toujours au moins une réelle; alors $D = 0$, et (14) devient

$$A(A-C) = 0. \tag{15}$$

Nous pouvons satisfaire à cette équation de deux façons en prenant $A = 0$, ou $A = C$, et nous avons les deux formes correspondantes d'équations qui suivent

$$xy\,(mx+ny)=\alpha\,(x^2-y^2),$$
$$x\,(x^2+y^2+2\lambda xy)=\alpha\,(x^2-y^2);$$

la première correspond à des cubiques dont les trois asymptotes sont réelles, tandis que deux d'entre elles peuvent être imaginaires avec la seconde forme. Cette dernière comprend toutes les strophoïdes que l'on obtient en faisant $\lambda=\cos\theta$, θ étant l'angle des deux droites qui servent à définir la strophoïde.

Supposons maintenant $K^2=-1$; l'équation (13) devient

$$A\,(A+C)+D\,(B+D)=0.$$

Si $D=0$, on peut prendre $A=0$ ou $A+C=0$, et on a les deux formes

$$xy\,(mx+ny)=\alpha\,(x^2+y^2),$$
$$x\,(x^2+2\lambda xy-y^2)=\alpha\,(x^2+y^2).$$

Si les axes sont obliques, nous n'avons pas grand'chose à ajouter à ce qui a été dit; mais il n'en sera pas de même si les axes sont rectangulaires, c'est-à-dire si l'origine est un foyer de la cubique. Dans ce cas, on pourra prendre pour axes deux droites rectangulaires quelconques et par suite satisfaire à la condition $D=0$; les deux formes d'équation sont équivalentes et expriment que deux asymptotes sont rectangulaires, et le théorème énoncé plus haut devient le suivant :

Si une cubique unicursale dont le point double est un foyer à deux directions asymptotiques rectangulaires, la corde polaire d'un point de la cubique enveloppe une parabole ayant pour foyer le point double et pour directrice correspondante la droite des inflexions.

III. L'équation (5) se prête aisément, par sa forme seule, à la démonstration de propriétés intéressantes des cubiques unicursales.

Les coordonnées t et t' des points de contact des tangentes menées d'un point θ de la courbe ayant une somme nulle, les rayons qui joignent ces points de contact au point double et les tangentes en ce dernier point forment un faisceau harmonique. En d'autres termes, ces rayons et les tangentes forment un faisceau en involution dont les tangentes sont les rayons doubles. Si ces tangentes sont les droites isotropes, deux rayons conjugués sont rectangulaires; on voit donc que, si le point double d'une cubique unicursale en est un foyer, la corde qui joint les points de contact des tangentes menées à la courbe par un quelconque de ses points est vue du foyer sous un angle droit. Le calcul montre tout aussi aisément cette propriété. Supposons les axes rectangulaires; les coordonnées t, t' des points de contact des tangentes menées du point θ sont données par l'équation

$$a + d\theta\, t^2 = 0.$$

L'équation de la droite joignant l'origine au point t est

$$y = tX \qquad \text{ou} \qquad x + Ky = t\,(x - Ky);$$

son coefficient angulaire est $\frac{t-1}{K(t+1)}$; la condition pour que les deux rayons correspondant à t et t' soient rectangulaires sera

$$(t-1)(t'-1) + K^2(t+1)(t'+1) = 0,$$

ou, en tenant compte de $t + t' = 0$, $tt' = \frac{a}{d\theta}$,

$$(1 + K^2)\left(\frac{a}{d\theta} + 1\right) = 0.$$

Si $1 + K^2$ n'est point nul, il n'y a qu'un seul point θ répondant à la question, savoir $\theta = -\frac{a}{d}$; mais, si $1 + K^2 = 0$, la relation de perpendicularité est toujours satisfaite, et on retrouve le résultat précédemment indiqué.

Nous avons vu que les cubiques, dont deux directions asymptotiques forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, jouissent de cette propriété que les cordes polaires de leurs points enveloppent une parabole; elles jouissent aussi d'une autre propriété remarquable, c'est que les milieux de ces cordes sont en ligne droite. Cherchons, pour le démontrer, le lieu de ces milieux pour une quelconque des cubiques de la question.

Du point θ menons les tangentes; soient t, t', x, y, x', y', X, Y, X', Y' les coordonnées respectives des points de contact, $x_1 y_1$, $X_1 Y_1$ celles du milieu; nous aurons

$$2x_1 = x + x',$$
$$2y_1 = y + y';$$

donc

$$2(x_1 - Ky_1) = 2X_1 = X + X'$$
$$2(x_1 + Ky_1) = 2Y_1 = Y + Y'.$$

Par suite

$$2X_1 = \frac{t}{a + bt + ct^2 + dt^3} + \frac{t'}{a + bt' + ct'^2 + dt'^3},$$

$$2Y_1 = \frac{t^2}{a + bt + ct^2 + dt^3} + \frac{t'^2}{a + bt' + ct'^2 + dt'^3},$$

t et t' étant les racines de l'équation

$$a + d\theta t^2 = 0.$$

Comme $t' = -t$, nous pourrons écrire

$$2X_1 = \frac{t[a+ct^2 - t(b+dt^2)] - t[a+ct^2+t(b+dt^2)]}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2}$$

$$= \frac{-2t^2(b+dt^2)}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2},$$

$$2Y_1 = \frac{t^2[a+ct^2 - t(b+dt^2)] + t^2[a+ct^2+t(b+dt^2)]}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2}$$

$$= \frac{2t^2(a+ct^2)}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2}.$$

Remplaçant t^2 par $\frac{-a}{d\theta}$ et réduisant, on trouve

$$(16)\qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{d\theta(b\theta - a)}{a\theta(d\theta - c)^2 + d(b\theta - a)^2}, \\ Y_1 &= \frac{-a\theta(d\theta - c)}{a\theta(d\theta - c)^2 + d(b\theta - a)^2}. \end{aligned} \right.$$

Le lieu du milieu est donc en général une courbe unicursale du troisième ordre, comme la proposée; mais supposons $ad = bc = 0$, ou

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

divisons les deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{Y_1}{X_1} = -\frac{a}{d}\frac{d\theta - c}{b\theta - a}$$

et comme $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$,

$$\frac{Y_1}{X_1} = -\frac{a}{b} \qquad \text{ou} \qquad aX_1 + bY_1 = 0;$$

mais nous avons vu que dans ce cas l'équation de la courbe peut s'écrire

$$(aX + bY)(X^2 + \lambda Y^2) = XY.$$

de sorte que le lieu du milieu est la parallèle à la troisième asymptote menée par l'origine.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si deux directions asymptotiques d'une cubique unicursale forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, la corde polaire d'un point de la courbe enveloppe une parabole et le milieu de cette corde décrit la parallèle à la troisième asymptote menée par le point double. C'est le cas de toutes les cubiques dont le point double est un foyer et dont deux asymptotes sont rectangulaires, ou de même de celles dont les tangentes au point double sont rectangulaires et dont les droites isotropes sont deux directions asymptotiques, comme cela arrive pour les strophoïdes droites ou obliques.

Un autre cas intéressant est celui où la droite des inflexions est à l'infini, c'est-à-dire où $b = c = 0$. Dans ce cas la conique (12) a son centre au point double et pour asymptotes les tangentes en ce point. C'est une hyperbole si ces tangentes sont réelles, une ellipse, en général, si elles sont imaginaires, un cercle quand le point double est un foyer de la cubique.

De plus on a dans ce cas, par les formules (16),

$$X_1 = \frac{-\theta}{a + d\theta^3}, \qquad Y_1 = \frac{-\theta^2}{a + d\theta^3};$$

c'est-à-dire que le point $X_1 Y_1$ est le symétrique par rapport à l'origine du point θ d'où l'on a mené les tangentes; le lieu du milieu de la corde polaire est donc la cubique que l'on a fait tourner de 180° autour du point double. C'est le cas, par exemple, du folium de Descartes et, en général, de toutes les courbes dont l'équation serait

de la forme
$$ax^3 + dy^3 = xy,$$

car rien ne nous empêche dans nos calculs de supposer que X et Y représentent les coordonnées x et y elles-mêmes si l'équation a la forme

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^3 = xy$$

qu'on peut lui donner quand les tangentes au point double sont réelles.

Les conditions $b = 0$, $c = 0$ donnent, en se reportant aux formules (9),
$$C = 3AK^2, \quad B = \frac{3D}{K^2}$$

et l'équation générale des cubiques correspondantes devient

$$Ax^3 + \frac{3D}{K^2}x^2y + 3AK^2xy^2 + Dy = x^2 - K^2y^2.$$

Si l'on suppose les axes rectangulaires et $K^2 = -1$, c'est-à-dire si le point double est un foyer, cette équation devient
$$Ax^3 - 3Dx^2y - 3Axy^2 + Dy^3 = x^2 + y^2.$$

Les trois directions asymptotiques formant, comme il est aisé de le voir, un triangle équilatéral, la cubique a le point double pour foyer et trois axes de symétrie passant par ce foyer. Comme on peut prendre pour axes deux droites rectangulaires quelconques, on pourra supposer $D = 0$, et l'équation prendra la forme particulière
$$x(x^2 - 3y^2) = \lambda(x^2 + y^2).$$

La corde enveloppe un cercle et son milieu décrit une courbe symétrique de la cubique par rapport à son foyer.