NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI PILLEUX

Sur les centres de courbure

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 384-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__384_1>

SUR LES CENTRES DE COURBURE;

PAR M. HENRI PILLEUX,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

PROBLÈME. — *Un angle droit tournant autour de son sommet intercepte sur deux courbes* S *et* S′ *une sécante variable* MM′. *Trouver le point* c *où cette droite touche son enveloppe.*

Transformons la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O. On a comme pôle de MM′ le sommet mm' d'un angle droit dont les côtés m et m' sont tangents à deux courbes Σ et Σ'. Cherchons la tangente à la courbe tracée par ce point.

Par la Cinématique, on l'obtient ainsi :

Les normales en t et t' donnent un point i qui, joint au point mm', donne la perpendiculaire à la tangente c.

En revenant à la figure primitive, on a le point c par la construction suivante :

Dans le triangle OMM′, la tangente en M, la tangente en M′ et la droite ON perpendiculaire à Oc coupent respectivement les côtés opposés en trois points A, A′ et N, qui sont une droite I.

Il est donc facile d'avoir N au moyen de cette droite et par suite c.

Réciproquement. — Ayant c et la tangente en M, on a la tangente en M′, car la droite I est alors déterminée par A et N, ce qui donne A′.

Généralisation. — On peut, par une projection, remplacer les droites rectangulaires issues de O par les rayons homologues de deux faisceaux en involution.

Applications. — *Centre de courbure de la podaire d'une courbe.*

La normale en M s'obtient par une construction connue. Dans le triangle MOI, on a la tangente en M. Donc, si l'on avait la tangente en I, on pourrait avoir le point c où MI touche son enveloppe. Or I trace la podaire de la développée de la courbe S; donc, si l'on a le centre de courbure γ de la courbe S, on a la tangente en I et, par suite, le point c par six lignes de construction.

Exemple : Centre de courbure du limaçon de Pascal (podaire de cercle). Ici γ est le centre du cercle dont on prend la podaire.

Centre de courbure de l'antipodaire d'une courbe.

Ayant c, on peut avoir N, par suite A′ et par suite γ.

Exemple : Coniques (antipodaires de cercle).

Centre de courbure des conchoïdes.

On a la normale MI par une construction connue. Si l'on considère le triangle rectangle IOM, on a la tangente en M; donc pour savoir où MI touche son enveloppe, il suffit de connaître le point où la tangente en I coupe OM. On a ce point A′ facilement au moyen du triangle POI dans lequel on connaît la tangente en S et le point γ où PI touche son enveloppe. Ayant A′, on a le point c par la construction ordinaire.

Généralisation. — Au lieu de deux faisceaux en involution, issus d'un point O, considérons deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont Oi et Oj. Nous aurons le point c où MM′ touche son enveloppe, en transformant la construction de la tangente à la courbe lieu des points d'où l'on voit deux courbes sous un angle constant. Cela donne l'énoncé suivant :

La droite OA′, conjuguée de OM′ par rapport à Oi et Oj, coupe la tangente en M′ en un point A′.

La droite OA, conjuguée de OM par rapport à Oi et Oj, coupe la tangente en M en un point A.

La droite ON, conjuguée de Oc par rapport à Oi et Oj, coupe MM′ en un point N ; A, A′ et N sont en ligne droite.

Ceci s'applique à un angle de grandeur constante tournant autour de son sommet : Oi et Oj sont alors les droites isotropes.