E.-N. BARISIEN

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 394-403
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__394_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1891;

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE E.-N. BARISIEN.

Soit (E) *une ellipse qui, rapportée à ses axes a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

et soient x_0, y_0 *les coordonnées d'un point* M *du plan de cette ellipse : on considère le cercle* (C) *passant par le point* M *et les points de contact* P, Q *des tangentes à l'ellipse issues du point* M.

1° *Le cercle* (C) *rencontre l'ellipse en deux autres points* P′ *et* Q′; *prouver que les tangentes à l'ellipse en ces deux points se coupent en un point* M′ *situé sur le cercle; montrer que par* M, M′ *et les deux foyers réels on peut faire passer un cercle; de même par* M, M′ *et les deux foyers imaginaires.*

2° *Soient* I, I′, I″ *les points où se coupent respectivement les droites* PQ, P′Q′, *les droites* PQ′, P′Q, *enfin* *les droites* PP′, QQ′ : *on suppose que le point* M *reste fixe et que l'ellipse* (E) *se déforme en gardant les mêmes foyers; on demande les lieux décrits par les points* I, I′ *et* I″; *on propose enfin de montrer que tout cercle passant par les points* I′, I″ *est orthogonal au cercle décrit sur* MM′ *comme diamètre.*

I. Désignons les coordonnées du point M′ par x_1, y_1. Les polaires PQ et P′Q′ des points M et M′ par rapport à l'ellipse (E) ont pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par P, Q, P′, Q′ est donc

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) \\ \quad + \left(\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - 1\right)\left(\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} - 1\right) = 0. \end{cases}$$

En exprimant que cette conique passe par le point M, on a la relation

$$(2)\qquad \lambda + \left(\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} - 1\right) = 0,$$

après avoir supprimé le facteur $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$ qui est différent de zéro.

Or cette relation (2) est obtenue aussi en exprimant que la conique (1) passe par le point M′.

Il en résulte donc que l'on peut définir la propriété générale suivante, dont celle de l'énoncé n'est qu'un cas particulier.

Si l'on considère les points d'intersection d'une *ellipse* (E) *avec deux droites* (D) *et* (D′), *la conique passant par ces points d'intersection et par le pôle de* (D) *passe aussi par le pôle de* (D′).

Exprimons maintenant que la conique (1) est un cercle, nous aurons les deux conditions

$$(3)\qquad \frac{a^2\lambda + x_1x_0}{a^4} = \frac{b^2\lambda - y_1y_0}{b^4},$$

$$(4)\qquad x_1y_0 + x_0y_1 = 0.$$

L'élimination de λ entre (2) et (3) donne la relation

$$(5)\qquad x_1x_0 - y_1y_0 = c^2.$$

De (4) et (5) on déduit les coordonnées x_1, y_1 de M′ en fonction des coordonnées x_0, y_0 de M. On a

$$(6)\qquad x_1 = \frac{c^2x_0}{x_0^2+y_0^2},\qquad y_1 = -\frac{c^2y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

On peut remarquer, en désignant par O le centre de l'ellipse (E), que la condition (4) exprime que les droites PQ, P′Q′ ou leurs diamètres conjugués OM, OM′ sont également inclinés sur les axes, propriété connue des droites d'intersection d'un cercle et d'une ellipse.

On remarque aussi que les relations (6) donnent

$$(x_1^2+y_1^2)(x_0^2+y_0^2) = c^4,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{OM}.\mathrm{OM}' = c^2 = \text{const.},$$

quel que soit le point M.

L'équation générale d'un cercle passant par les foyers réels de l'ellipse (E) est

$$x^2+y^2+2\mathrm{B}y - c^2 = 0.$$

Voyons si ce cercle peut passer à la fois par M et M′.

Si cela est possible, il faut que l'on ait

$$x_0^2 + y_0^2 + 2By_0 - c^2 = 0,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + 2By_1 - c^2 = 0.$$

ou, en éliminant B,

$$y_1(x_0^2 + y_0^2 - c^2) = y_0(x_1^2 + y_1^2 - c^2).$$

En remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs (6), on trouve une identité.

Lorsque

$$x_0^2 + y_0^2 = c^2,$$

on a

$$x_1 = x_0, \qquad y_1 = -y_0, \qquad B = 0,$$

ce qui montre alors que le cercle passant par M, M' et les deux foyers réels a pour diamètre la distance focale, et que les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe focal.

De même, le cercle passant par les foyers imaginaires a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2Ax + c^2 = 0.$$

Si ce cercle peut passer par M et M', on doit avoir à la fois

$$x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + c^2 = 0,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + 2Ax_1 + c^2 = 0,$$

ou, en éliminant A,

$$x_1(x_0^2 + y_0^2 + c^2) = x_0(x_1^2 + y_1^2 + c^2).$$

En tenant compte des valeurs (6), on voit que cette relation est une identité, ce qui démontre bien que les deux foyers imaginaires, M et M', sont sur un même cercle.

II. Lorsque le point M est fixe et les ellipses (E) homofocales, c^2 est constant.

Par suite, le point M′ est aussi fixe. Les valeurs (6) de x_1 et y_1 sont donc des quantités constantes.

Lieux des points I. — Le point I étant à l'intersection des polaires de M et M′ par rapport aux ellipses homofocales, pour avoir le lieu de ce point I, il suffit d'éliminer a^2 et b^2 entre les trois équations

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0,$$

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Les deux premières équations donnent $\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{b^2}$ et, par suite, a^2 et b^2, valeurs que l'on porte dans la troisième. On obtient ainsi pour l'équation du lieu

$$(7) \qquad \frac{x}{y_1 - y_0} + \frac{y}{x_1 - x_0} + \frac{c^2}{x_1 y_0 - y_1 x_0} = 0.$$

C'est une droite perpendiculaire à la droite MM′, et passant par le milieu de MM′.

Lieu des points I′ *et* I″. — Les points I′ et I″ peuvent être considérés comme les centres des deux couples de droites passant par P, Q, P′, Q′, autres que le couple PQ, P′Q′.

En formant l'équation en λ qui exprime que la conique (1) est un couple de droites, on trouve une équation du troisième degré en λ avec un terme indépendant de λ qui s'annule en tenant compte des valeurs (6). Il était d'ailleurs à prévoir que l'on trouverait la valeur $\lambda = 0$, puisque, pour cette valeur, la conique (1) se réduit aux deux droites PQ, P′Q′.

Les valeurs de λ, correspondant aux deux couples PQ′, P'Q et PP', QQ', sont donc données par l'équation

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} 4a^2b^2\lambda^2 + 4\lambda(b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 - a^2b^2) \\ \quad + 4x_1x_0y_1y_0 + b^2(x_1 - x_0)^2 + a^2(y_1 - y_0)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Les coordonnées x et y du centre des coniques (1) sont

$$(9)\qquad 2x(\lambda a^2 + x_1x_0) = (x_1 + x_0)a^2,$$

$$(10)\qquad 2y(\lambda b^2 + y_1y_0) = (y_1 + y_0)b^2.$$

Si donc on tirait de (8) les deux valeurs de λ et si on les portait dans (9) et (10), on aurait les coordonnées des points I' et I''. Comme ces valeurs de x et y contiendraient un radical fonction de a^2 et b^2, il en résulte que les deux points I' et I'' font partie de la même courbe dont on obtiendra l'équation en éliminant a^2, b^2 et λ entre (8), (9) et (10), et

$$(11)\qquad a^2 - b^2 = c^2.$$

L'élimination de λ entre (9) et (10) donne

$$(12)\qquad \frac{2x_1x_0}{a^2} - \frac{2y_1y_0}{b^2} = \frac{x_1 + x_0}{x} - \frac{y_1 + y_0}{y}.$$

Remarquons maintenant qu'en multipliant (9) et (10) membre à membre, on a

$$\begin{array}{l} 4xy[\lambda^2a^2b^2 + \lambda(b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0) + x_1x_0y_1y_0] \\ \quad = (x_1 + x_0)(y_1 + y_0)a^2b^2. \end{array}$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (8) s'écrit

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x_1 + x_0)(y_1 + y_0)a^2b^2}{xy} \\ \quad - 4\lambda a^2b^2 + b^2(x_1 - x_0)^2 + a^2(y_1 - y_0)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Mais, de (9) et (10), on tire

$$2\lambda a^2b^2 = \frac{a^2b^2(x_1 + x_0) - 2b^2xx_1x_0}{x},$$

$$2\lambda a^2b^2 = \frac{a^2b^2(y_1 + y_0) - 2a^2yy_1y_0}{y}$$

et, en ajoutant,

$$4\lambda a^2 b^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x_1 + x_0}{x} + \frac{y_1 + y_0}{y}\right) - 2a^2 y_1 y_0 - 2b^2 x_1 x_0.$$

Portant cette valeur de λ dans (13), il vient

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2 + x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2 - y_0^2}{b^2} \\ \quad = \dfrac{x_1 + x_0}{x} + \dfrac{y_1 + y_0}{y} - \dfrac{(x_1 + x_0)(y_1 + y_0)}{xy}. \end{cases}$$

On est donc ramené à éliminer a^2 et b^2 entre (11), (12) et (14).

De (12) et (14) on tirera $\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{b^2}$, d'où l'on déduira a^2 et b^2 et, en portant ces valeurs dans (11), on aura l'équation du lieu des points I′ et I″.

En procédant ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} 2xy &\left[\frac{x(x_1 - x_0)}{x_1 x_0} + \frac{y(y_1 - y_0)}{y_1 y_0} - 2\right] \\ &\times \frac{[x_1 x_0(y_1^2 + y_0^2) - y_1 y_0(x_1^2 + x_0^2)]}{(x_1 + x_0)(y_1 + y_0)} \\ = &\left[x(x_1 - x_0) - \frac{yx_0^2}{y_0^2}(y_1 + y_0) - 2x_1 x_0\right] \\ &\times \left[y(y_1 + y_0) - \frac{xy_0^2}{x_0^2}(x_1 + x_0) - 2y_1 y_0\right]. \end{aligned}$$

Le lieu est une cubique de la forme

$$xy(\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y + \mathrm{R}) = (\mathrm{M}x + \mathrm{N}y + \mathrm{S})(\mathrm{M}'x - \mathrm{N}'y + \mathrm{S}') = 0,$$

qu'il est facile de construire.

Nous allons maintenant démontrer la propriété suivante :

La droite I′I″ *passe par le milieu de* MM′.

Si λ' et λ'' sont les deux racines de l'équation (8) et si $x'y'$, $x''y''$ sont les coordonnées des points I′ et I″, nous aurons, d'après (9) et (10),

$$(15)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{(x_1+x_0)\,a^2}{2(\lambda' a^2 + x_1 x_0)}, & y' = \dfrac{2(\lambda' b^2 + y_1 y_0)}{(y_1+y_0)\,b^2}, \\ x'' = \dfrac{(x_1+x_0)\,a^2}{2(\lambda'' a^2 + x_1 x_0)}, & y'' = \dfrac{(y_1+y_0)\,b^2}{2(\lambda'' b^2 + y_1 y_0)}. \end{cases}$$

La droite I′I″ a pour équation

$$Y - y' = (X - x')\left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right),$$

ou bien

$$Y - y'' = (X - x'')\left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right),$$

ou encore, en ajoutant, pour plus de symétrie,

$$(x' - x'')\,[2Y - (y' + y'')] = (y' - y'')\,[2X - (x' + x'')].$$

Pour que la droite I′I″ passe par le milieu de MM′, il faut que l'on ait

$$2X = x_1 + x_0, \qquad 2Y = y_1 + y_0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(x' - x'')\,&[(y_1 + y_0) - (y' + y'')] \\ &= (y' - y'')\,[(x_1 + x_0) - (x' + x'')].\end{aligned}$$

En y portant les valeurs (15), cette équation ne contient plus que les valeurs λ' et λ'', et elle se réduit à

$$(\lambda' + \lambda'')\,a^2 b^2 + (a^2 y_1 y_0 + b^2 x_1 x_0 - a^2 b^2) = 0,$$

ce qui est une identité d'après l'équation (8). La propriété est donc démontrée.

Cette propriété va nous être utile pour montrer que tout cercle passant par I′I″ est orthogonal au cercle décrit sur MM′ comme diamètre.

Nous allons d'abord démontrer que le cercle décrit sur II′ comme diamètre est orthogonal au cercle décrit sur MM′ comme diamètre.

A cet effet, désignons par ξ, η les coordonnées du milieu de MM′ et par μ et ν celles du milieu de II′. On a

$$\xi = \frac{x_0 + x_1}{2}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_0}{2},$$
$$\mu = \frac{x' + x''}{2}, \qquad \nu = \frac{y' + y''}{2}.$$

Si R désigne le rayon du cercle MM′, ρ celui du cercle II′, et D la distance des centres de ces deux cercles, on a

$$4R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2,$$
$$4\rho^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$
$$D^2 = (\xi - \mu)^2 + (\eta - \nu)^2.$$

Si les deux cercles sont orthogonaux, on doit avoir

$$R^2 + \rho^2 = D^2,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 \\ = [(x_0 + x_1) - (x' + x'')]^2 + [(y_0 + y_1) - (y' + y'')]^2\end{aligned}$$

ou

$$(16) \quad \left\{\begin{aligned} &2x_1x_0 + 2y_1y_0 + 2x'x'' + 2y'y'' \\ &\quad = (x_0 + x_1)(x' + x'') + (y_0 + y_1)(y' + y'').\end{aligned}\right.$$

On pourrait, comme pour la démonstration précédente, substituer les valeurs (15) dans cette relation qui serait alors fonction de $\lambda'\lambda''$ et $(\lambda' + \lambda'')$. En tenant compte de (8), on verrait que cette relation est une identité.

Le calcul ainsi conduit serait un peu long. Il est préférable de se servir des valeurs directes de x', x'', y', y''. L'équation qui donne x' et x'' s'obtient en éliminant λ entre (8) et (9), élimination fort simple, qui conduit à

$$\begin{aligned}x^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2) \\ + \frac{2xx_0^2(a^2yy_0 - b^2x_1x_0 - a^2b^2)}{x_1 + x_0} + a^2b^2x_0^2 = 0;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$x' + x'' = -\frac{2x_0^2(a^2y_1y_0 - b^2x_1x_0 - a^2b^2)}{(x_1 + x_0)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)},$$

$$x'x'' = \frac{a^2b^2x_0^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

On trouverait de même en formant l'équation en y,

$$y' + y'' = -\frac{2y_0^2(b^2x_1x_0 - a^2y_1y_0 - a^2b^2)}{(y_1 + y_0)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)},$$

$$y'y'' = +\frac{a^2b^2y_0^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

En portant ces valeurs dans (16) et tenant compte des valeurs (6), on trouve que (16) est une identité.

Le cercle décrit sur MM′ comme diamètre est donc orthogonal à celui de diamètre I′I″. Il est facile de voir qu'il en est de même pour un cercle quelconque passant par I′I″.

En effet, soient C le milieu de I′I″ et C′ le milieu de MM′. Nous avons vu que I′I″ passe par le point C′ et que

$$R^2 + \rho^2 = D^2.$$

Considérons maintenant un cercle quelconque passant par I′, I″, de centre C″, et ayant en K un des points de rencontre avec le cercle C′MM′. Nous avons alors

$$\overline{C'C''}^2 = \overline{CC''}^2 + D^2.$$

Or

$$\overline{CC''}^2 = \overline{C''I'}^2 - \rho^2 = \overline{C''K}^2 - \rho^2,$$

$$D^2 = R^2 + \rho^2 = \overline{C'K}^2 + \rho^2.$$

En ajoutant, on a

$$\overline{C'C''}^2 = \overline{C''K}^2 + \overline{CK}^2,$$

ce qui prouve bien que les cercles C′MM′ et C″I′I″ sont orthogonaux.