NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. HUMBERT

Sur l'orientation des systèmes de droites

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 123-136
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__123_0>

SUR L'ORIENTATION DES SYSTÈMES DE DROITES (¹);

Par M. G. HUMBERT.

V. — Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques.

20. Soient deux coniques A et B ayant respectivement pour foyers réels les points f et f', g et g' : le lieu F des foyers des coniques inscrites dans le même quadrilatère que les coniques A et B est, d'après la théorie générale, le lieu des points M tels que les systèmes de droites Mf et Mf', Mg et Mg' aient mêmes bissectrices.

Rien n'est plus facile que d'obtenir, en partant de là, l'équation du lieu : on trouverait une cubique, passant par les points cycliques du plan, et ayant une asymptote parallèle à la droite qui joint les milieux des segments ff' et gg', c'est-à-dire les centres des coniques A et B.

Cette cubique peut être déterminée par points d'une manière très simple.

La conique A a deux foyers imaginaires, qui s'obtiennent en joignant f et f' aux points cycliques I et J, et en prenant les intersections des droites ainsi obtenues; ces deux nouveaux points, f_1 et f'_1, sont aussi sur le lieu des foyers F.

De même, si l'on joint les points f et f' aux points g et g', les droites fg et $f'g'$, fg' et $f'g$ se coupent respec-

(¹) *Voir* même Tome, p. 37.

tivement en deux nouveaux points, h et h', qui sont sur F, d'après la propriété fondamentale de ce lieu.

Il y a plus : les couples de points f_1 et f'_1, h et h' jouent le même rôle que les couples f et f' ou g et g'. La proposition est évidente pour les points f_1 et f'_1 qui sont des foyers d'une des coniques du faisceau; on peut montrer de même que h et h' sont aussi les foyers d'une de ces coniques : en effet, une conique du faisceau a un foyer en h, puisque h est sur F; le second foyer réel de cette conique est nécessairement en h', car soit h'_1 ce foyer : les systèmes de droites fg, fg' et fh, fh'_1 ont même orientation, d'après la propriété fondamentale de F; les droites fg et fh coïncidant, il en est de même de fg' et fh'_1, ce qui prouve que h'_1 est sur la droite fh'; il est également sur la droite $f'h'$ et coïncide par suite avec h'.

En d'autres termes, le lieu F peut être défini, au moyen des trois couples de points f et f', g et g', I et J, de la manière suivante : on joint deux à deux les points de deux de ces couples; on obtient, par les intersections des droites ainsi construites, un nouveau couple; en opérant de la même manière sur ce nouveau couple et sur le troisième, on obtient un cinquième couple, et l'on continue ainsi indéfiniment en combinant deux quelconques des couples obtenus; tous ces couples sont sur F. On reconnaît la construction discontinue donnée par Schröter pour les courbes du troisième ordre; les couples de points considérés sont des couples de *pôles conjugués* ou *couples steinériens;* ils jouissent de la propriété que les tangentes menées à la cubique aux deux points d'un couple se rencontrent sur la courbe.

21. On peut dire d'après cela que *le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une cubique circulaire, dont les tangentes aux points cy-*

cliques se coupent sur la courbe; ou, plus simplement, une cubique circulaire qui passe par son foyer singulier.

Réciproquement, toute cubique circulaire passant par son foyer singulier peut être considérée comme le lieu des foyers de coniques inscrites dans un quadrilatère : il suffit de prendre sur cette cubique deux couples steinériens quelconques, f et f', g et g', du même système que le couple formé par les points cycliques, et la cubique est le lieu des coniques du faisceau tangentiel déterminé par deux coniques, quelconques d'ailleurs, ayant respectivement pour foyers les points f et f', g et g'.

22. Les propositions démontrées plus haut relativement aux centres harmoniques prennent une forme assez simple si l'on observe, avec Laguerre, que le centre harmonique a de deux points f et f' par rapport à un point M est sur la circonférence passant par M, f et f', et que les points M, a, f, f' divisent harmoniquement cette circonférence.

Par un point M, *du lieu* F *des coniques inscrites dans un quadrilatère, et par les foyers f et f' de l'une quelconque de ces coniques, faisons passer un cercle et prenons, sur ce cercle, le point a, qui, avec les points* M, *f, f', divise harmoniquement la circonférence :* d'après un théorème établi plus haut, *le point a décrit un cercle tangent en* M *à la courbe* F.

On voit aisément que ce cercle passe par le point obtenu en prolongeant d'une longueur égale à elle-même la droite qui va de M au foyer singulier de la cubique.

Si la courbe F a un point double, le centre harmonique des deux points d'un même couple f et f' par rapport à ce point double est un point fixe : d'après ce qui a été dit au n° 19, la courbe F n'aura de point double que si le faisceau de coniques qui sert à la définir contient un cercle; le point double est alors le foyer ou centre du cercle. Donc :

Si, par les foyers f et f' de l'une quelconque des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle de centre o, et par le point o, on mène une circonférence, cette circonférence passe par un second point fixe o' qui, avec les points o, f et f', la divise harmoniquement. Le segment oo' a pour milieu le foyer singulier de la cubique lieu des foyers f, f'.

La courbe F est alors ce que Quételet appelle une *focale à nœud;* une focale à nœud est, d'après ce qui précède, une cubique unicursale passant par les points cycliques et par son foyer singulier. On peut la définir aussi comme le lieu du sommet d'un angle de grandeur variable dont les côtés passent par deux points fixes f et f', et la bissectrice par un troisième point fixe o.

23. On rencontre cette courbe dans un problème assez intéressant de la Géométrie de l'espace.

Chasles a fait voir que le lieu des pieds des normales à un système de quadriques homofocales, contenues dans un plan donné P, est une focale à nœud, et nous avons démontré que le lieu des foyers des sections faites par le plan P dans les quadriques homofocales coïncide avec le lieu de Chasles. On peut d'ailleurs établir directement que le lieu des foyers est une focale à nœud, en s'appuyant sur les principes généraux énoncés au commencement de ce travail, et en déduire quelques propriétés géométriques simples.

24. Cherchons, en effet, l'équation tangentielle, dans le plan P, des coniques communes à ce plan et aux surfaces homofocales.

Il y a deux quadriques du système homofocal qui touchent une droite donnée; donc deux des coniques, dans le plan P, touchent une droite de ce plan, et l'on en conclut aisément que l'équation générale cherchée contiendra un paramètre θ au second degré. Elle sera de la forme

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0,$$

et l'on pourra supposer que les coniques $A = 0$ et $C = 0$ sont deux quelconques des coniques du système.

Or parmi ces coniques figure celle qui se compose des deux points cycliques du plan P, puisque le cercle à l'infini fait partie du système homofocal; on peut donc supposer que l'on a

$$A = u^2 + v^2,$$

et l'équation devient

$$(u^2 + v^2)\theta^2 + B\theta + C = 0.$$

Les coniques ainsi représentées sont homofocales aux coniques

$$B\theta + C = 0,$$

qui appartiennent à un même faisceau tangentiel.

Cette remarque suffit pour établir que le lieu des foyers des coniques est une cubique circulaire, passant par son foyer singulier; observons maintenant qu'une des quadriques du système homofocal touche le plan P, et, par suite, une des coniques se réduit (au point de vue tangentiel) au point de contact compté deux fois; ce point est donc un point double de la cubique, qui est dès lors une focale à nœud.

Si maintenant on désigne par f et f', g et g', les foyers de deux des coniques, la focale à nœud peut être considérée comme le lieu des foyers des coniques tangentes aux droites fg, fg', $f'g$, $f'g'$, et, puisqu'elle a un point double, ces quatre droites doivent nécessairement toucher un cercle décrit du point double comme centre.

25. On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Le lieu des foyers des sections faites dans une série de quadriques homofocales par un plan P *est une focale à nœud, dont le point double est le point de contact o du plan* P *avec la quadrique du système qui touche ce plan.*

Si par le point o et les foyers f et f' de l'une des coniques d'intersection on fait passer un cercle, ce cercle passe par un second point fixe o' qui, avec les points o, f et f', divise harmoniquement la circonférence.

Le segment oo' a pour milieu le foyer singulier Φ *de la focale : ce point* Φ *est le foyer de la parabole qui figure parmi les coniques d'intersection.*

Les quatre droites qui joignent les foyers réels de l'une des coniques d'intersection aux foyers réels d'une autre de ces coniques touchent un même cercle qui a pour centre le point o.

En particulier :

Les droites qui joignent deux à deux les points où deux coniques, focales l'une de l'autre, sont coupées par un même plan forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

VI. — Propriété des foyers des courbes appartenant à un faisceau tangentiel.

26. Nous avons démontré au n° 18, comme conséquence d'une proposition fondamentale, que le centre harmonique des n foyers réels d'une courbe appartenant à un faisceau tangentiel de classe n, par rapport à un point du lieu F correspondant, reste sur un cercle, tangent en ce point à la courbe F.

Par des considérations d'un autre ordre, on arrive à un résultat qui complète le précédent :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des foyers réels de chacune des courbes d'un faisceau tangentiel décrit un cercle (¹).

Ce théorème peut recevoir une forme plus élégante si l'on observe avec Laguerre que le centre harmonique des foyers réels d'une courbe par rapport à un point coïncide avec le centre harmonique des points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à la courbe. Ainsi :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à chacune des courbes d'un même faisceau tangentiel décrit un cercle.

VII. — Extension à l'espace.

27. Il ne paraît pas possible d'introduire, pour un système de plans disposés d'une manière quelconque

(¹) M. Franklin, dans le Mémoire cité, a démontré cette proposition que nous nous étions borné à énoncer.

dans l'espace, de notion géométrique analogue à celle de l'*orientation* d'un système de droites tracées sur un même plan : aussi nous bornerons-nous, dans ce qui suit, au cas où tous les plans considérés passent par une même droite : on peut alors étendre à l'espace, sous cette forme restreinte, un grand nombre des résultats qui précèdent et arriver ainsi à des propositions intéressantes.

On dira que deux systèmes de plans, passant tous par une même droite, D, ont même orientation lorsque les systèmes de droites obtenus en coupant les plans par un plan perpendiculaire à D ont même orientation. Cela posé, des théorèmes des n^{os} 3, 4 et 5 résultent presque immédiatement les conséquences suivantes :

Pour qu'un système variable de n plans passant tous par une droite fixe, et dont l'équation contient algébriquement un nombre quelconque de paramètres, conserve une orientation fixe, il faut et il suffit que lorsqu'un ou plusieurs des plans du système viennent à toucher le cercle imaginaire de l'infini en un point I, *d'autres plans du système, en même nombre, touchent au même instant ce cercle en un autre point* J.

Les points I et J sont ceux où les plans normaux à la droite fixe coupent le cercle à l'infini.

Soit une famille de surfaces dont l'équation dépend algébriquement d'un nombre quelconque de paramètres : pour que l'orientation du système des plans tangents qu'on peut mener par une droite donnée, D, *à chacune de ces surfaces demeure constante, il faut et il suffit que les surfaces de la famille qui touchent un des plans isotropes passant par* D *touchent l'autre plan isotrope mené par cette droite.*

Par plan *isotrope*, nous entendons un plan tangent au cercle de l'infini.

En particulier :

Soit un faisceau tangentiel de cônes algébriques de classe n, ayant même sommet ; par une droite focale, f, de l'un d'eux, menons les n plans tangents à l'un quelconque des autres : tous les systèmes ainsi obtenus autour de la droite f ont même orientation.

Réciproquement,

Si une droite f, passant par le sommet commun des cônes, jouit de cette propriété, c'est une focale de l'un des cônes du faisceau.

Le système des plans tangents menés à un cône algébrique de classe n par une droite issue de son sommet et le système des plans qui passent par la droite et chacune des n focales réelles du cône ont même orientation. (Laguerre).

De la combinaison des deux dernières propositions résulte celle-ci :

Le lieu des focales d'un faisceau tangentiel de cônes algébriques de même sommet, déterminé par deux cônes A *et* B *de classe n, est un cône tel que si, par une de ses génératrices et les n focales de* A, *puis les n focales de* B, *on fait passer des plans, les deux systèmes de plans ainsi obtenus aient même orientation.*

En coupant les cônes considérés par une sphère ayant pour centre leur sommet commun, on établit, comme au n° 16, le théorème suivant :

Si une courbe sphérique est telle que de chacun de ses points n arcs de grand cercle soient vus sous des *angles dont la somme est un multiple de π, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres groupes de n arcs ayant tous leurs extrémités sur la courbe.* (DARBOUX).

Cette courbe peut être considérée d'une infinité de façons comme le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes sphériques de classe n, et, en particulier, comme le lieu des foyers des courbes sphériques de classe n tangentes aux n^2 grands cercles qui joignent n points de la sphère à n autres points de cette surface.

Les deux systèmes de n points ainsi introduits sont les extrémités d'un même système de n arcs de grand cercle convenant à la première définition des courbes qui nous occupent, et réciproquement.

28. Il est aisé de trouver l'ordre du cône, lieu des focales des cônes de même sommet et de classe n appartenant à un faisceau tangentiel. Ces cônes sont, en effet, coupés par le plan de l'infini suivant des courbes appartenant aussi à un faisceau tangentiel, et le problème revient évidemment au suivant : étant donné un faisceau tangentiel de courbes planes de classe n et une conique (le cercle à l'infini), on mène les tangentes communes à la conique et à une quelconque des courbes du faisceau; trouver le degré du lieu engendré par les points de concours de ces tangentes deux à deux, lorsque l'on fait varier la courbe dans le faisceau.

Soient t une tangente quelconque de la conique; A la courbe du faisceau qui touche t : il est clair que les points du lieu situés sur t sont à l'intersection de cette droite avec les $2n-1$ autres tangentes communes à la conique et à la courbe A; le lieu est donc d'ordre $2n-1$.

On voit facilement que ce lieu n'a, en général, de point double que si une même courbe du faisceau touche la conique en deux points; le point double est alors le pôle, par rapport à la conique, de la droite qui joint les deux points de contact. Donc :

Le lieu des focales des cônes d'un même faisceau tangentiel de classe n est un cône d'ordre $2n - 1$; *ce cône n'a, en général, de génératrice double que si un des cônes du faisceau est doublement tangent au cercle de l'infini.*

29. Si, au lieu d'un faisceau tangentiel de cônes ayant même sommet, on considère un faisceau tangentiel de surfaces quelconques de classe n, les résultats précédents peuvent encore se généraliser.

Il est aisé d'établir tout d'abord, comme au n° 5, que :

Si les plans tangents menés par une droite à deux surfaces de classe n forment deux systèmes de même orientation, les n plans tangents menés par cette droite à une quelconque des surfaces du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières forment encore un système de même orientation que les deux systèmes primitifs.

On en conclut, étant donné un faisceau tangentiel de surfaces, que les droites qui jouissent, par rapport aux surfaces du faisceau, de la propriété précédente, forment un *complexe*.

Il est aisé de déterminer les *cônes* et la *surface des singularités* de ce complexe.

Soit, en effet, M un point quelconque de l'espace; les cônes de sommet M circonscrits aux surfaces du faisceau forment eux-mêmes un faisceau tangentiel de classe n, et les droites du complexe issues de M sont évidemment, d'après ce qui a été dit aux n^{os} 27 et 28, les *focales* de ces cônes.

Les cônes du complexe sont donc des cônes de degré $2n-1$, et chacun d'eux coupe une sphère ayant son sommet pour centre suivant une des courbes remarquables rencontrées plus haut.

Pour qu'un cône du complexe, de sommet M, ait une génératrice double, il faut, en général, et il suffit dans tous les cas, qu'un cône de sommet M, circonscrit à l'une des surfaces A, du faisceau, touche deux fois le cercle de l'infini (n° 28); ou, en d'autres termes, que la sphère de rayon nul ayant M pour centre, soit bitangente à la surface A. Le point M est alors, par définition, un *foyer* de A, c'est-à-dire est situé sur une des *focales* de A, en appelant *focales* d'une surface, selon l'usage, les lignes doubles de la développable circonscrite à la surface et au cercle de l'infini.

On peut donc énoncer ce théorème :

Soit un faisceau tangentiel de surfaces de classe n : les droites qui jouissent de la propriété que l'orientation du système des n plans tangents menés par l'une d'elles à une surface du faisceau demeure fixe, quand la surface varie dans le faisceau, forment un complexe d'ordre $2n-1$.

La surface des singularités du complexe est le lieu des focales des surfaces du faisceau; les droites singulières du complexe sont les tangentes de ces focales.

Tout cône du complexe coupe une sphère ayant son sommet pour centre suivant une courbe, qui peut être considérée comme le lieu des points d'où l'on voit, sur la sphère, n arcs de grand cercle sous des angles dont la somme est un multiple de π.

Le cas particulier d'un faisceau tangentiel de quadriques est intéressant; on verrait aisément que le lieu des focales des quadriques de ce faisceau est une surface du huitième ordre. Le complexe précédent est ici d'ordre trois, il coïncide avec celui que déterminent les génératrices rectilignes des quadriques homofocales à celles du faisceau; c'est donc un cas particulier du complexe formé par les génératrices des quadriques en nombre doublement infini qui touchent sept (et, par suite, huit) plans : ce complexe et sa surface des singularités sont bien connus; M. R. Sturm, en particulier, a fait, dans le Tome 70 du *Journal de Crelle,* une étude détaillée du complexe réciproque, formé par les génératrices des quadriques qui passent par huit points.

30. Pour terminer, nous indiquerons une propriété intéressante des surfaces algébriques qui ont *toutes leurs focales à l'infini*. L'équation de ces surfaces, en coordonnées tangentielles rectangulaires, est semblable à celle des courbes planes analogues, étudiées au n° 6; si

$$ux + vy + wz + p = 0$$

est l'équation du plan, l'équation des surfaces considérées est de la forme

$$(6)\qquad F_n(u, v, w) - (u^2 + v^2 + w^2) f_{n-2}(u, v, w, p) = 0;$$

où F_n et f_{n-2} sont des polynômes *homogènes* d'ordres n et $n - 2$, dont le premier ne contient que u, v, w.

Menons à la surface (6) des plans tangents par une droite quelconque, que nous pouvons supposer être l'axe Oz, puisque l'équation (6) ne change pas de forme pour une transformation rectangulaire des coordonnées. Les valeurs proportionnelles de u et v qui correspondent à ces plans tangents s'obtiennent en faisant $w = 0$ et $p = 0$ dans (6); on trouve ainsi

$$\varphi(u, v) = F_n(u, v, 0) - (u^2 + v^2) f_{n-2}(u, v, 0, 0) = 0$$

L'orientation du système des plans tangents considérés est donnée par l'expression

$$\frac{\varphi(1, i)}{\varphi(1, -i)};$$

c'est-à-dire par

$$\frac{F_n(1, i, 0)}{F_n(1, -i, 0)};$$

elle est donc la même que celle du système des plans tangents menés par Oz à la surface

$$F_n(u, v, w) = 0,$$

qui est une courbe de la classe n située dans le plan de l'infini. Or l'orientation du système des plans tangents menés à cette courbe par la droite Oz est celle des plans tangents menés par Oz au cône de sommet O dont les génératrices s'appuient sur la courbe, et, par suite (n° 27), cette orientation est la même que celle des plans menés par Oz et par les n focales réelles du cône précédent.

La direction de ces focales est d'ailleurs indépendante du point qu'on a choisi pour sommet du cône, puisque les cônes qui passent par une même courbe à l'infini sont parallèles entre eux. En d'autres termes :

Si une surface algébrique de classe n a toutes ses focales à l'infini, l'orientation du système des n plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque de l'espace est la même que celle du système des n plans qu'on peut mener par la droite parallèlement à n directions fixes.

Les n directions fixes sont évidemment celles des n focales réelles du cône qu'on peut circonscrire à la surface à partir d'un point quelconque de l'espace.