NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SAINT-GERMAIN

Note sur le problème de mécanique donné à l'agrégation en 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 5-19

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1892.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DE SAINT-GERMAIN A M. ROUCHÉ.

Je vais encore indiquer cette année, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*, une solution du problème de Mécanique proposé au concours d'agrégation des Sciences mathématiques : on y arrive par une voie toute naturelle, sans artifice, et il est surprenant que la question ait arrêté nombre de candidats. J'en résume l'énoncé :

On considère un point M, qui se meut sur une surface polie S sous l'action d'une force P, toujours dirigée tangentiellement à S, dérivant d'un potentiel et dont la grandeur en chaque point dépend uniquement de la valeur u du potentiel en ce point; on suppose en outre que M puisse décrire une infinité de courbes d'égal potentiel pourvu qu'on lui imprime des vitesses initiales convenables. Cela posé, on demande :

1° De montrer que le ds^2 de la surface S peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{du^2}{F(u)} + \frac{dv^2}{\varphi(u)},$$

les lignes $v =$ const. étant des lignes géodésiques orthogonales aux lignes U d'égal potentiel.

2° En supposant les lignes U fermées, déterminer la forme des fonctions F et φ de telle sorte que M décrive toujours une trajectoire fermée quelles que soient les conditions initiales où on le place, au moins en se tenant entre des limites convenables; indiquer la grandeur de la force correspondante P.

3° Au nombre des surfaces satisfaisant aux conditions précédentes, se trouve la surface de révolution S_1 sur laquelle on a

$$(2) \qquad ds^2 = \frac{m^8\,du^2}{4u(m^2+u)^4} + \frac{m^4 u\,dv^2}{(m^2+u)^2},$$

m désignant une longueur donnée, v l'azimut de l'élément ds : indiquer la forme de la méridienne; déterminer le mouvement de M sous l'action de la force P définie précédemment, en supposant qu'à l'instant initial le mobile soit sur le parallèle correspondant à $u = 2m^2$ avec une vitesse tangente à ce parallèle. Pression exercée sur S_1.

Nous allons traiter successivement les diverses parties de cet énoncé.

1. Prenons pour lignes coordonnées sur S les lignes U et leurs trajectoires orthogonales V déterminées chacune par un paramètre w; ds^2 sera de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dw^2.$$

Voyons d'abord ce qui résulte, pour la forme des fonctions E, G, de l'existence d'un potentiel sur S (il n'y a pas lieu de s'occuper de ce qui se passe hors de la surface). Soient, en un point quelconque, P_1, P_2 les composantes de P suivant les tangentes aux lignes U, V qui se coupent en ce point : le travail correspondant à un déplacement élémentaire sera

$$P_1\sqrt{\mathrm{E}}\,du + P_2\sqrt{\mathrm{G}}\,dw;$$

il doit d'ailleurs se réduire à du ; donc P_2 est nul ; P est dirigée normalement à U du côté où u augmente ; sa grandeur, égale à P_1, vérifie l'équation

$$P\sqrt{E} = 1; \tag{3}$$

P étant, par hypothèse, fonction de u seul, il en est de même pour E.

Cherchons maintenant ce qui résulte de l'hypothèse que M peut décrire une quelconque des lignes U ; le mouvement le plus général de M est déterminé par les équations de Lagrange, lesquelles, en faisant la masse du mobile égale à l'unité et ayant égard à ce que E est indépendant de w, prennent la forme

$$E\frac{du'}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}w'^2 = 1,$$

$$G\frac{dw'}{dt} + \frac{\partial G}{\partial u}u'w' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w}w'^2 = 0.$$

Ces équations doivent être compatibles quand on fait u égal à une constante, c'est-à-dire u' égal à zéro ; on doit avoir à la fois

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}w'^2 = -1, \tag{4}$$

$$G\frac{dw'}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w}w'^2 = 0. \tag{5}$$

L'équation (4) devant avoir lieu pendant tout le mouvement, nous égalerons à zéro sa dérivée prise par rapport à t en regardant u comme constant, w, w' comme fonctions de t ; si, entre l'équation ainsi obtenue et (5), on élimine w' et $\frac{dw'}{dt}$, il vient

$$0 = G\frac{\partial^2 G}{\partial u\,\partial w} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial w} = G^2\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

d'où une intégrale première de la forme ([1])

$$(6)\qquad \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} = f'(u);$$

une nouvelle intégration donne

$$\log G = f(u) + f_1(w), \qquad G = g(u)g_1(w).$$

Mais on peut substituer à w la variable v définie par l'équation

$$g_1(w)\,dw^2 = dv^2,$$

les lignes coordonnées V restant les mêmes; et, de ce qui précède, il résulte que, sur S, le ds^2 peut se mettre sous la forme proposée (1). Si l'on y introduit une variable u_1 telle que du_1^2 soit égal à $\frac{du^2}{F(u)}$, ds^2 prendra la forme $du_1^2 + \mu\,dv^2$, qui caractérise la propriété des lignes

---

([1]) On trouverait directement l'équation (6) en éliminant w'^2 entre (5) et l'équation des forces vives d'après laquelle le carré de la vitesse sur U, Gw'^2, doit être simplement fonction de u; il en résulte que la condition (6) est nécessaire pour que M se meuve sur U; mais on peut douter qu'elle soit suffisante. Le remplacement d'une équation du mouvement par l'intégrale des forces vives peut faire croire à la possibilité de mouvements impossibles. Ainsi, le mouvement d'un point abandonné à lui-même est déterminé, en coordonnées polaires, par les équations

$$(\alpha)\qquad \frac{dr'}{dt} - r\theta'^2 = 0,$$

$$(\beta)\qquad \frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0.$$

La seconde, (β), associée à l'intégrale des forces vives,

$$r'^2 + r^2\theta'^2 = h,$$

laisserait croire que le mouvement peut être circulaire et uniforme, r et θ' restant constants. On sait qu'il n'en est rien et l'on n'aurait pas été conduit à ce paradoxe si l'on avait considéré les équations (α) et (β).

$v=$ const. d'être géodésiques; on voit de plus que S est applicable sur une surface de révolution.

L'équation (5) ou son équivalente

$$v'^2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\varphi(u)} = -2$$

montre que, dans le mouvement considéré, v', ainsi que la vitesse, ont des valeurs constantes, déterminées en fonction de u; on connaît donc la vitesse initiale qu'il faut imprimer à M pour lui faire décrire une ligne U donnée; cette vitesse sera naturellement tangente à U. On peut remarquer que le coefficient de dv^2 dans ds^2 doit varier en sens inverse de u.

2. Envisageons d'abord une conséquence de l'hypothèse que les lignes U sont fermées. Sur l'une quelconque U_1 d'entre elles, où $u=u_1$, ds se réduit à $\frac{dv}{\sqrt{\varphi(u_1)}}$; la coordonnée v, qui détermine les lignes V, est égale au produit d'une constante k par l'arc s_1 compté sur U_1 entre un point fixe et le point d'intersection de U_1 avec chacune des lignes V; la ligne fermée U_1 ayant une longueur l, si l'on augmente s_1 d'un multiple de l et v d'un multiple de kl, on retombe sur la même ligne V. On peut dire que la position d'un point sur S est fonction de v; cette fonction a pour période kl, ou encore 2π, en prenant k égal à $\frac{2\pi}{l}$; ce choix simplifiera un peu les résultats suivants et il est permis à cause de l'indétermination de la fonction $\varphi(u)$.

D'autre part, cherchons le mouvement le plus général du point M sous l'action de la force P, égale, d'après l'équation (3), à $\sqrt{F(u)}$: il peut être déterminé par l'intégrale des forces vives

$$\frac{u'^2}{F(u)} + \frac{v'^2}{\varphi(u)} = 2u + h, \tag{7}$$

et par celle des équations de Lagrange où entre le terme de la forme $\frac{\partial T}{\partial v'}$, soit

$$\frac{d}{dt}\frac{v'}{\varphi(u)} = 0,$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad \frac{v'}{\varphi(u)} = C.$$

Si, entre les équations (7) et (8), j'élimine dt qui entre implicitement dans u' et v', j'obtiens une équation différentielle de la trajectoire :

$$(9) \qquad \frac{\varphi^2(u)}{F(u)}\frac{du^2}{dv^2} = \frac{2u}{C^2} + \frac{h}{C^2} - \varphi(u).$$

Pour que cette équation définisse une ligne fermée, u doit nécessairement rester compris entre deux limites, α, β et, quand il va de l'une à l'autre, la quantité constante ω dont v augmente doit être commensurable avec π. Or, tandis que, d'après l'équation (8), v' ne s'annule jamais, u' s'annule quand u passe par un maximum β ou un minimum α; alors $\frac{du}{dv}$ est aussi nul et l'on a

$$\frac{2\alpha}{C^2} + \frac{h}{C^2} - \varphi(\alpha) = 0,$$

$$\frac{2\beta}{C^2} + \frac{h}{C^2} - \varphi(\beta) = 0.$$

Entre ces équations et (9) éliminons $\frac{1}{C^2}$ et $\frac{h}{C^2}$; en tirant dv de l'équation résultante et intégrant par rapport à u, de α jusqu'à β, on obtient

$$(10) \qquad \omega = \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(u)}{\sqrt{F(u)}} \begin{vmatrix} u & 1 & \varphi(u) \\ \alpha & 1 & \varphi(\alpha) \\ \beta & 1 & \varphi(\beta) \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\beta - \alpha}\, du.$$

Dans la quinzième des Notes [1] dont il a enrichi le *Cours de Mécanique* de Despeyrous, M. Darboux considère précisément l'intégrale (10) et cherche quelles doivent être les formes des fonctions F et φ pour que ω soit commensurable avec π, période de ν, quels que soient α, β, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales du mouvement; je n'ai qu'à reproduire brièvement l'analyse de l'éminent géomètre.

Suivant une remarque faite par M. Bertrand dans une question analogue, pour être toujours commensurable avec π, ω doit être constant : sinon, il serait fonction, en général continue, de α, β et passerait par une infinité de valeurs incommensurables avec π quand α et β varieraient. Pour mieux voir les conséquences, changeons de variable sous le signe $\int$ en posant

$$\alpha = a - h, \qquad \beta = a + h, \qquad u = a + hx$$

et développons l'intégrale en série suivant les puissances croissantes de h. On a vu (n° 1) que la trajectoire peut coïncider avec une quelconque des lignes U; dans ce cas,

---

[1] Cette Note figurait au programme spécial du Concours pour 1892. Plusieurs candidats ont pensé que, S étant applicable sur une surface de révolution Σ, on était ramené à la recherche des surfaces de révolution sur lesquelles un point, sollicité par une force convenable correspondant à P, décrit toujours une trajectoire fermée, c'est-à-dire au problème même que M. Darboux a résolu, et ils ont reproduit intégralement son remarquable Mémoire, ou du moins ses résultats principaux. Un peu d'attention eût montré que la substitution de Σ à S ne fait que compliquer notre problème, auquel se rapporte seulement une partie du Mémoire. Mais il y a plus : de ce que deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre dans le sens ordinaire du mot, on ne peut pas conclure qu'à une courbe fermée sur l'une correspond une courbe fermée sur l'autre : ainsi un hélicoïde est applicable sur une infinité de surfaces de révolution dont les parallèles correspondent aux hélices tracées sur l'hélicoïde : or les parallèles sont des lignes fermées, les hélices ne le sont pas.

h est nul; on peut donc prendre h aussi petit que l'on veut et, quand il ne dépasse pas une certaine limite, la série est convergente. Son premier terme ω_0, indépendant de h, doit être égal à $\mu\pi$, μ étant commensurable, tandis que les coefficients des diverses puissances de h seront nuls, et cela quel que soit a. Le déterminant qui entre sous le signe $\int$ devient

$$D = h \begin{vmatrix} x & 1 & \varphi(a) + hx\varphi'(a) + \dfrac{h^2x^2}{2}\varphi''(a) + \ldots \\ -1 & 1 & \varphi(a) - h\varphi'(a) + \dfrac{h^2}{2}\varphi''(a) - \ldots \\ 1 & 1 & \varphi(a) + h\varphi'(a) + \dfrac{h^2}{2}\varphi''(a) + \ldots \end{vmatrix};$$

il se simplifie beaucoup si, des éléments de la troisième colonne, on retranche ceux de la première multipliés par $h\varphi'(a) + \frac{h^3}{6}\varphi'''(a)$ et ceux de la seconde multipliés par $\varphi(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a) + \frac{h^4}{24}\varphi^{\text{IV}}(a)$, et l'on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} D &= h^3(1 - x^2)\varphi''(a) \\ &\quad + \frac{h^4}{3}(x - x^3)\varphi'''(a) + \frac{h^5}{12}(1 - x^4)\varphi^{\text{IV}}(a) + \ldots. \end{aligned}$$

Cela posé, il est aisé de voir que l'on a

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}\,\varphi(a)}{\sqrt{F(a)\varphi''(a)}} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi\sqrt{2}\,\varphi(a)}{\sqrt{F(a)\varphi''(a)}};$$

pour que ce terme reste constant et égal à $\mu\pi$, on doit avoir

$$F(a) = \frac{2\varphi^2(a)}{\mu^2\varphi''(a)} \tag{11}$$

et cette identité déterminera la fonction F quand on connaîtra la forme de φ. Pour cela, reprenons l'exprespression de ω, remplaçons-y D et $F(a+hx)$ par leurs valeurs et écrivons φ, φ', φ'', ... au lieu de $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$: nous trouverons successivement

$$\omega = \mu \int_{-1}^{1} \left(\frac{1 + hx \dfrac{\varphi'''}{\varphi''} + \dfrac{h^2 x^2}{2} \dfrac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} + \ldots}{1 + \dfrac{hx}{3} \dfrac{\varphi'''}{\varphi'} + h^2 \dfrac{1+x^2}{12} \dfrac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} + \ldots} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \mu \int_{-1}^{1} \left[1 + \frac{hx}{3} \frac{\varphi'''}{\varphi''} + \frac{h^2}{24} \left(5x^2 \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - 4x^2 \frac{\varphi'''^2}{\varphi''^3} \right) + \ldots \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \mu\pi \left[1 + \frac{h^2}{48} \left(3 \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - 4 \frac{\varphi'''^2}{\varphi''^2} \right) + \ldots \right].$$

Nous devons, on l'a vu, annuler en particulier le coefficient de h^2; il en résulte, en désignant maintenant par u l'argument de la fonction φ et de ses dérivées,

$$3 \frac{\varphi^{\text{IV}}(u)}{\varphi'''(u)} = 4 \frac{\varphi'''(u)}{\varphi''(u)}, \qquad \overline{\varphi'''(u)}^3 = A \overline{\varphi''(u)}^4.$$

Pour achever la détermination de φ, il faut distinguer deux cas, selon que A est nul ou différent de zéro; dans le premier, $\varphi''(u)$ est une constante $2C$; intégrant, puis se reportant à l'identité (11), on a des résultats de la forme

$$(12) \quad \varphi(u) = Cu^2 + C'u + C'', \qquad F(u) = \frac{(Cu^2 + C'u + C'')^2}{\mu^2 C}.$$

Si, au contraire, A n'est pas nul, on peut écrire

$$[\varphi''(u)]^{-\frac{4}{3}} \varphi'''(u) = -\frac{3}{\sqrt[3]{2C}},$$

d'où, en intégrant et résolvant par rapport à φ'',

$$\varphi''(u) = \frac{2C}{(u+k)^3};$$

intégrant de nouveau, puis invoquant l'identité (11), il vient

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi(u) = \dfrac{C + C'(u+k) + C''(u+k)^2}{u+k}, \\[2ex] F(u) = \dfrac{[C + C'(u+k) + C''(u+k)^2]^2 (u+k)}{\mu^2 C}. \end{cases}$$

Nous avons obtenu les formules (12) ou (13) en annulant le coefficient de h^2 dans le développement de ω, sans nous occuper des termes suivants, qui doivent aussi être nuls; elles expriment des conditions nécessaires pour que ω reste égal à $\mu\pi$, mais nous ne savons pas si elles sont suffisantes. Pour nous en assurer, calculons, à l'aide de l'équation (10), la valeur que prend ω quand on donne à F et φ les formes (12) ou (13) (1), les dernières, par exemple. Je change de variable en posant

$$u + k = u_1, \qquad \alpha + k = \alpha_1, \qquad \beta + k = \beta_1;$$

le déterminant qui figure sous le signe $\int$ devient

$$D = \begin{vmatrix} u_1 - k & 1 & \dfrac{C + C'u_1 + C''u_1^2}{u_1} \\[2ex] \alpha_1 - k & 1 & \dfrac{C + C'\alpha_1 + C''\alpha_1^2}{\alpha_1} \\[2ex] \beta_1 - k & 1 & \dfrac{C + C'\beta_1 + C''\beta_1^2}{\beta_1} \end{vmatrix} = \frac{C(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - u_1)(u_1 - \alpha_1)}{\alpha_1 \beta_1 u_1},$$

et l'on a, par une intégration bien facile,

$$\omega = \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{du_1 \sqrt{\alpha_1 \beta_1}}{u_1 \sqrt{(\beta_1 - u_1)(u_1 - \alpha_1)}} = \mu\pi$$

(1) Pareil calcul ne se trouve pas dans le Mémoire de M. Darboux parce que les formules (12) ou (13) l'amènent à considérer les mouvements produits sur une sphère par des forces de forme connues auxquelles, suivant une remarque antérieure de M. Paul Serret, correspondent toujours des trajectoires fermées.

Avec les formules (12), la vérification se ferait par le même procédé, mais avec plus de facilité, et la question est résolue. Dans les deux cas, P, égal à $\sqrt{F(u)}$, est connu.

3. On reconnaît d'abord que les fonctions $F(u)$ et $\varphi(u)$ qui figurent dans l'expression (2) de ds^2 sont données par les formules (13) en y faisant

$$k = 0, \qquad C = 1, \qquad C' = \frac{2}{m^2}, \qquad C'' = \frac{1}{m^4}, \qquad \mu = \frac{1}{2}.$$

Sur S_1 les lignes U sont les parallèles, les lignes V les méridiennes. Pour étudier l'une de ces dernières, identifions l'expression (2) de ds^2 avec la forme

$$d\sigma^2 + r^2\,dv^2;$$

$d\sigma$ représente un élément d'arc de méridienne dont la distance à l'axe OZ de la surface est r. On a d'abord

$$r = \frac{m^2\sqrt{u}}{m^2+u}, \qquad dr = \frac{m^2(m^2-u)\,du}{2(m^2+u)^2\sqrt{u}};$$

puis, r et z pouvant être considérés comme des coordonnées rectangulaires dans le plan de la méridienne,

$$dz = \sqrt{d\sigma^2 - dr^2} = \frac{m^2\sqrt{2m^2-u}}{2(m^2+u)^2}\,du,$$

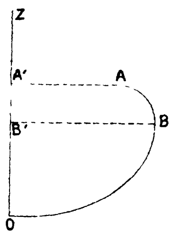
$$\frac{dz}{dr} = \frac{\sqrt{2m^2u-u^2}}{m^2-u}.$$

La valeur de z en fonction de u s'obtient par une quadrature très simple :

$$z = \frac{m}{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{6} - \frac{m\sqrt{6m^2-3u}}{m^2+u} + \log\frac{m\sqrt{3}+\sqrt{2m^2-u}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{m^2+u}}\right].$$

Pour que r et dz soient réels, u doit rester compris entre zéro et $2m^2$; pour $u = 0$, r est nul et nous ferons

$z = 0$; la méridienne part de l'origine, normalement à OZ; u croissant jusqu'à $2m^2$, z va sans cesse en croissant jusqu'à $\frac{\sqrt{6} - \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} m$, environ $0{,}38m$; r croît jusqu'à la valeur $\frac{m}{2}$, pour $u = m^2$, auquel correspond le parallèle de rayon maximum BB′, puis il décroît jusqu'à $\frac{m\sqrt{2}}{3}$, pour $u = 2m^2$ et l'on a un point d'arrêt A où la tangente est perpendiculaire sur OZ. En se plaçant au point de vue analytique, on pourrait faire revenir u de $2m^2$ à 0, dz changeant de signe; on aurait un arc symétrique de OA par rapport à AA′; mais, au



point de vue mécanique, on n'a à considérer que l'arc OA et la surface qu'il engendre (c'est seulement dans la région engendrée par BA que le point M pourrait décrire un parallèle).

La force P, toujours dirigée tangentiellement à la méridienne dans le sens OA, est égale à $\frac{2(m^2+u)^2\sqrt{u}}{m^4}$. Le mouvement qu'elle imprime au point M peut être déterminé par les intégrales des forces vives et des aires, qui correspondent aux équations (7) et (8); mais, à l'instant initial, on a supposé $u = 2m^2$, $u' = 0$; nous ferons, pour le même instant, $v = 0$, $v' = \lambda$, λ étant donné; les constantes qui figurent dans les intégrales

(7) et (8) se déterminent immédiatement et nous écrirons celles-ci sous la forme

$$\frac{m^8}{4u(m^2+u)^4}\frac{du^2}{dt^2}+\frac{m^4u}{(m^2+u)^2}\frac{dv^2}{dt^2}=2u-4m^2+\frac{2}{9}\lambda^2m^2,$$

$$(14)\qquad \frac{m^2u}{(m^2+u)^2}\frac{dv}{dt}=\frac{2}{9}\lambda.$$

L'équation de la trajectoire, obtenue en éliminant dt peut s'écrire

$$(15)\qquad dv=\pm\frac{1}{2}\frac{du}{u^2\sqrt{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2m^2}\right)\left(\frac{2}{m^2}-\frac{81}{\lambda^2m^2}-\frac{1}{u}\right)}};$$

à l'instant initial, le second facteur sous le radical est égal à $3\frac{\lambda^2-54}{2\lambda^2m^2}$; s'il est négatif, u ne pourra décroître à partir de $2m^2$ sans rendre dv imaginaire; mais, sur S_1, u ne saurait surpasser $2m^2$; il lui restera donc nécessairement égal et nous serons dans le cas singulier d'un mouvement uniforme sur le parallèle limite. Si, au contraire, λ^2 est >54, ou si la vitesse initiale est $>2m\sqrt{3}$, u pourra varier entre $2m^2$ et la valeur α, toujours comprise entre $2m^2$ et $\frac{1}{2}m^2$, qui est définie par l'équation

$$(16)\qquad \frac{1}{\alpha}=\frac{2}{m^2}-\frac{81}{\lambda^2m^2}.$$

Le second facteur sous le radical, dans l'équation (15), devient $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{u}$; d'ailleurs l'équation s'intègre au moyen d'un arc cosinus, et, en résolvant l'équation intégrale par rapport à $\frac{1}{u}$, on trouve

$$(17)\qquad \frac{1}{u}=\frac{\cos^2v}{2m^2}+\frac{\sin^2v}{\alpha};$$

cette équation définit une courbe comprise entre les parallèles correspondant à $u = 2m^2$ et à $u = \alpha$; le mobile va les toucher alternativement en des points dont les azimuts diffèrent de $\frac{\pi}{2}$: la trajectoire est bien une courbe fermée. La loi du mouvement est donnée par l'équation (14); on en déduit, eu égard à l'équation (17),

$$dt = \frac{9m^2}{2\lambda} \frac{\frac{1}{u}\,du}{\left(1 + \frac{m^2}{u}\right)^2} - \frac{9\alpha}{\lambda} \frac{\alpha + 2m^2 \operatorname{tang}^2 v}{(3\alpha - 2m^2 \operatorname{tang}^2 v)^2} \frac{dv}{\cos^2 v},$$

$$\lambda t = \frac{\sqrt{3\alpha}}{m\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{m\sqrt{2} \operatorname{tang} v}{\sqrt{3\alpha}} - \frac{3\alpha \operatorname{tang} v}{3\alpha + 2m^2 \operatorname{tang}^2 v}.$$

Enfin la pression N est ici simplement égale au quotient du carré de la vitesse W par le rayon de courbure R de la section normale passant par la tangente MT à la trajectoire; la formule d'Euler donne R en fonction des rayons de courbure principaux R_1, R_2 et de l'angle θ que fait MT avec la méridienne en M. On a évidemment

$$N = \frac{W^2 \cos^2\theta}{R_1} + \frac{W^2 \sin^2\theta}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} \frac{d\sigma^2}{du^2} \frac{du^2}{dv^2} + \frac{1}{R_2} r^2\right) \frac{dv^2}{dt^2}.$$

$\frac{1}{R_1}$, courbure de la méridienne, est, en se reportant aux calculs relatifs à cette ligne,

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{d\frac{dr}{d\sigma}}{dz} = \frac{2(m^2 + u)^2}{m^4\sqrt{2m^2 - u}};$$

on a aussi

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} \frac{dz}{d\sigma} = \frac{(m^2 + u)\sqrt{2m^2 - u}}{m^4}.$$

Les résultats précédents, combinés avec ceux qui se rapportent à la méridienne et avec les équations (14), (15), (16), donnent, après de simples réductions de calculs,

$$N = \frac{4\lambda^2(m^2+\alpha)(m^2+u)^2\sqrt{2m^2-u}}{81m^4\alpha}.$$