NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES CAFFIN

Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École normale supérieure en 1894

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 498-501

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__498_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE (¹) POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1894;

PAR M. GEORGES CAFFIN,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

On sait que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un cercle égal au cercle des neuf points du triangle, roulant dans un cercle concentrique à ce dernier, et de rayon triple. Il est facile de ramener à cette question celle qui était proposée aux candidats à l'École Normale.

Le problème reposait sur la transformation de Steiner. Si l'on considère un faisceau ponctuel de coniques, on sait que les polaires d'un point fixe A passent par un autre point fixe B, les points A, B étant ainsi conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau. Le point A étant donné, le point B est bien déterminé, sauf si l'on se donne pour A un des sommets du triangle conjugué commun à toutes les coniques, auquel cas le point B est indéterminé sur le côté opposé du triangle.

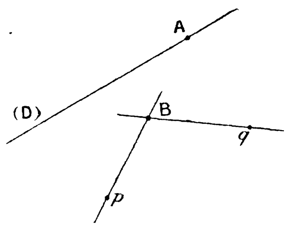
Cela étant, et le point A décrivant une droite D, trouver le lieu décrit par le point B. Ce lieu est une conique qui est aussi le lieu des pôles de la droite fixe D par rapport à toutes les coniques du faisceau.

(¹) *Voir* même Tome, p. 299

Soient, en effet, p, q les pôles de (D) par rapport à deux coniques fixes. Le conjugué d'un point A s'obtiendra en prenant l'intersection des polaires de A par rapport aux deux coniques fixes. Les faisceaux pB, qB sont homographiques, et la conique, lieu de B, passe en p, q, ce qui démontre la propriété annoncée.

Comme (D) coupe les trois côtés du triangle conjugué, la conique (C), lieu de B, est circonscrite à ce triangle.

Fig. 1.



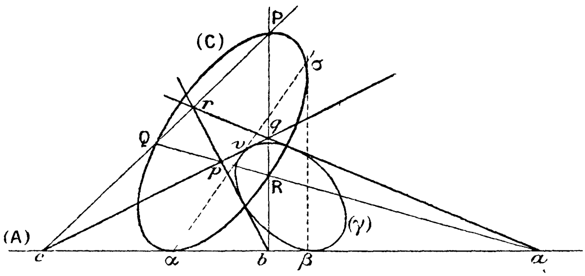
Réciproquement, toute conique circonscrite au triangle est la transformée d'une droite D. En effet, soient deux points p, q de cette conique, p', q' leurs conjugués; la droite $p'q'$ est la droite cherchée.

Les points à l'infini de la conique (C) s'obtiendront en prenant les points d'intersection de (D) avec la conique (Γ) transformée de la droite de l'infini. Donc, pour que (C) soit une parabole, il faut et il suffit que (D) enveloppe la conique (Γ).

On propose alors de chercher combien il passe d'axes de paraboles (C) par un point P donné et la nature de ces axes, en un mot l'enveloppe de ces axes. La question peut être transformée avantageusement.

Considérons deux triangles homologiques PQR, pqr dont les côtés se coupent en abc sur l'axe d'homologie (A) et tels que les points p, q, r appartiennent aux côtés du triangle P, Q, R. Soient α, β deux points de l'axe. Il existe une conique (C) passant en P, Q, R et tangente en α à (A). Soit $\alpha\sigma$ la polaire de β dans la conique (C). Il existe une conique (γ) tangente à $\alpha\sigma$, pr,

Fig. 2.



qr et tangente en β à (A) ou encore à deux droites infiniment voisines (A), $(\mathrm{A})'$ se coupant en β; (A') détermine sur les quatre tangentes A, $\alpha\sigma$, pr, qr un rapport anharmonique

$$\rho = (\beta\alpha\, ba).$$

De même pq détermine le rapport

$$\rho' = (cv\, pq).$$

Mais, dans la conique (C), les polaires des points α, β, a, b passent respectivement par les points c, v, p, q, ce qui entraîne $\rho = \rho'$. La conique (γ) est donc tangente à pq.

Si maintenant A est la droite de l'infini et si α, β sont conjugués par rapport aux points circulaires, on obtient ce théorème :

Les axes des paraboles circonscrites à un triangle sont les tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du premier.

Or les tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans un triangle sont les droites de Simson du triangle, et la question se trouve ainsi ramenée à la question bien connue que nous avons rappelée en commençant.