NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BARISIEN

Sur les podaires successives d’une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 157-164

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__157_1>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [suite (1)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

Aire des anti-podaires successives de la courbe donnée. — Si nous désignons sous le nom d'*anti-podaire* une courbe telle que sa podaire soit la courbe donnée, nous voyons que pour construire le point P_{-1} de la première anti-podaire, il suffit de mener en O une droite faisant avec OM le même angle que OM fait avec OP_1 et d'élever en M une perpendiculaire à OM. Le point de rencontre de ces deux droites donne le point P_{-1}. Si r_{-1} et θ_{-1} sont les coordonnées polaires de ce point, on a

$$\theta - \theta_{-1} = \theta_1 - \theta = V - \frac{\pi}{2};$$

et, par suite,

$$\frac{d\theta_{-1}}{d\theta} = 1 - \frac{dV}{d\theta} = 1 - \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

On a aussi

$$r_{-1} = \frac{r}{\sin V} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

(1) *Voir* même Tome, p. 89.

Donc, on a pour la différentielle de l'aire U_{-1} de la première anti-podaire

$$(13)\qquad \frac{dU_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} r_{-1}^2 \frac{d\theta_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2}(r^2 + rr'').$$

Généralisons cette formule et cherchons l'aire de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. Si θ_{-m} et r_{-m} sont les coordonnées du point correspondant de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire, on a

$$\theta_{-m} = \theta - m(\theta_1 - \theta) = \theta - m\left(V - \frac{\pi}{2}\right).$$

D'où

$$\frac{d\theta_{-m}}{d\theta} = 1 - m\frac{dV}{d\theta} = 1 - m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right).$$

De plus,

$$r_{-m} = \frac{r_{-(m-1)}}{\sin V} = \frac{r}{\sin^m V} = r\left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

On a donc, pour l'aire U_{-m},

$$(14)\qquad \frac{dU_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2}\right)^m \left[1 - m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right].$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. — En conduisant le calcul comme pour le rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire, on trouve

$$(15)\qquad R_{-m} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{m+1}{2}}}{r^m}\left[\frac{r^2 + r'^2 - m(r'^2 - rr'')}{r^2 + r'^2 - (m-1)(r'^2 - rr'')}\right].$$

En fonction de l'angle V et de R_0, on a aussi

$$R_{-m} = \frac{r}{\sin^{m+1} V}\left[\frac{(m+1)R_0 \sin V - mr}{mR_0 \sin V - (m-1)r}\right].$$

On en déduit les formules analogues à celles de

M. Husquin de Rhéville

$$R_{-1} = \frac{r}{R_0 \sin^3 V}(2 R_0 \sin V - r),$$

$$R_{-2} = \frac{r}{\sin^3 V}\left(\frac{3 R_0 \sin V - 2r}{2 R_0 \sin V - r}\right),$$

$$R_{-3} = \frac{r}{\sin^4 V}\left(\frac{4 R_0 \sin V - 3r}{3 R_0 \sin V - 2r}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On a donc aussi

$$R_{-1} R_{-2} R_{-3} \dots R_{-m} = \frac{r^m}{R_0 \sin^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} V}[(m+1) R_0 \sin V - mr],$$

et, par suite, pour le produit des rayons de courbure des m premières podaires et des m premières anti-podaires,

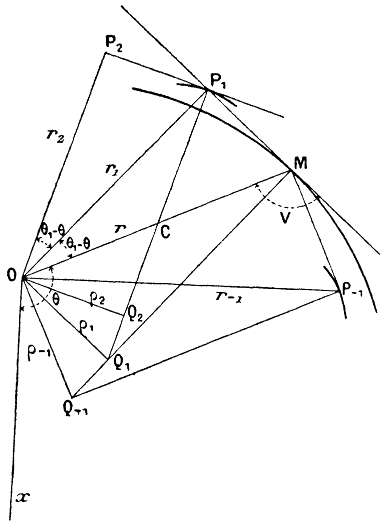
$$(R_1 R_2 R_3 \dots R_m)(R_{-1} R_{-2} R_{-3} \dots R_{-m})$$
$$= \frac{r^{2m+1} \sin^{m-1} V}{R_0}\left[\frac{(m+1) R_0 \sin V - mr}{(m+1) r - m R_0 \sin V}\right].$$

Rectification de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. — On trouve

$$(16) \qquad \frac{ds_{-m}}{d\theta} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m}[r^2 + r'^2 - m(r'^2 - rr'')].$$

Si maintenant nous construisons le quatrième sommet Q_{-1} du rectangle dont les trois autres sommets sont les points O, M et P_{-1}, et si nous abaissons la perpendiculaire OQ_1 sur la diagonale MQ_{-1}, les courbes lieux des points tels que Q_1 et Q_{-1} seront intéressantes à étudier au point de vue de la détermination de leurs aires.

La courbe décrite par Q_1 est la *podaire de la développée de la courbe fondamentale* et la courbe lieu du point Q_{-1} est la *podaire de la développée de la première anti-podaire.*



Cherchons donc les aires de ces deux genres de courbes.

Aire de la podaire de la développée de la courbe. — Soient ρ_1 et ω_1 les coordonnées du point Q_1, W_1 l'aire de cette courbe. Alors

$$\frac{dW_1}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_1^2\frac{d\omega_1}{d\theta}.$$

Or,

$$\omega_1 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant par rapport à θ et tenant compte de (3), il vient

$$\frac{d\omega_1}{d\theta} = \frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

D'autre part

$$\rho_1 = - r\cos V = - \frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}}.$$

Par suite,

$$(17) \qquad \frac{dW_1}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{r^2 r'^2}{(r^2+r'^2)^2}(r^2+2r'^2-rr'').$$

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — On trouve, en appelant ρ_m et ω_m les coordonnées du point Q_m et W_m l'aire de la courbe Q_m,

$$\frac{dW_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_m^2\frac{d\omega_m}{d\theta}.$$

Or,

$$\frac{d\omega_m}{d\theta} = \frac{d\theta_m}{d\theta},$$

$$\rho_m = - r\cos V\sin^{m-1}V.$$

Par conséquent,

$$(18) \qquad \frac{dW_m}{d\theta} = \frac{1}{2}r'^2\left(\frac{r^2}{r^2+r'^2}\right)^m\left[1+m\left(\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}\right)\right].$$

Aire de la podaire de la développée de la $m^{ième}$ *anti-podaire.* — Si W_{-m} est l'aire de cette courbe et si ρ_{-m} et ω_{-m} sont les coordonnées du point Q_{-m}, on a

$$\frac{dW_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_{-m}^2\frac{d\omega_{-m}}{d\theta}.$$

Mais

$$\omega_{-m} = \theta_{-(m-1)} - \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\frac{d\omega_{-m}}{d\theta} = \frac{d\theta_{-(m-1)}}{d\theta} = 1-(m-1)\frac{dV}{d\theta}.$$

De plus

$$\rho_{-m} = - r_{-(m-1)}\cot V = - \frac{r\cos V}{\sin^m V}.$$

Par conséquent

$$(19)\qquad \frac{dW_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2 \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2}\right)^{m-1} \left[1 - (m-1)\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right].$$

En faisant $m = 1$ dans cette formule, on a

$$(20)\qquad \frac{dW_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2.$$

Il est à remarquer aussi que l'on a

$$\rho_{-1} = -r'.$$

APPLICATIONS.

Nous allons appliquer ces formules à des cas particuliers et en déduire quelques résultats intéressants.

I. — Application a l'ellipse et a ses podaires du centre.

Si l'on prend pour équation de l'ellipse

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

on trouve

$$r'^2 = \frac{a^2 b^2 c^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$r'^2 - rr'' = \frac{a^2 b^2 c^2 (b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta)}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$r^2 + r'^2 = \frac{a^2 b^2 (a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{a^4 b^4}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3}.$$

Aire de la première podaire. — On sait que cette podaire a pour équation

$$r_1^2 = a^2 \cos^2\theta_1 + b^2 \sin^2\theta_1$$

et pour aire

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

Néanmoins recherchons cette aire par le procédé que nous avons indiqué, afin de la généraliser pour la podaire d'ordre m.

L'emploi de la formule (4) donne

$$\frac{dU_1}{d\theta} = \frac{a^4 b^4}{2} \frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2}.$$

Donc, l'aire totale est

$$U_1 = 2a^4 b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\, d\theta}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2}.$$

Afin d'intégrer facilement, remarquons que, si l'on pose pour abréger

$$a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta = A,$$

on a l'identité

$$a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta = \frac{A + a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Il vient donc

$$U_1 = \frac{2a^4 b^4}{a^2 + b^2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A} + a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A^2}\right).$$

En posant $\tan\theta = u$, on est ramené à des intégrales connues de la forme $\int_0^\infty \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^p}$.

On a ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A} = \int_0^\infty \frac{du}{a^4 u^2 + b^4} = \frac{\pi}{2a^2 b^2},$$

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A^2} = \int_0^\infty \frac{du(1 + u^2)}{(a^4 u^2 + b^4)^2}$$

$$= \frac{1}{a^4} \int_0^\infty \frac{du}{a^4 u^2 + b^4} - \frac{b^4}{a^4} \int_0^\infty \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^2} = \frac{\pi(a^4 + b^4)}{4a^6 b^6}.$$

On trouve, par suite, après réduction facile,

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

Aire de la $m^{ième}$ podaire de l'ellipse. — On trouve par l'application de la formule (7)

$$U_m = 2ma^4b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m-1}}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m+1}}\,d\theta$$

$$- 2(m-1)a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m-1}}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m}}\,d\theta.$$

Ces intégrales, comme pour le calcul de U_1, sont toujours ramenables à des intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p}.$$

En posant successivement

$$u = \frac{b^2}{a}\operatorname{tang}\varphi,$$

on a

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p} = \frac{1}{a^2b^{4p-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2}\varphi$$

$$= \frac{1}{a^2b^{4p-2}}\,\frac{1.3.5\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots(2p-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

On trouve ainsi pour les quatre premières podaires

(Ellipse).

$$U_0 = \pi ab,$$

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2),$$

$$U_2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi c^4}{4(a^2 + b^2)},$$

$$U_3 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{7\pi c^4}{16(a^2 + b^2)} + \frac{\pi c^4 a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)^3},$$

$$U_4 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{19\pi c^4}{32(a^2 + b^2)} + \frac{\pi c^4 a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^3} + \frac{\pi c^4 a^4 b^4}{2(a^2 + b^2)^5},$$

. . . .

(*A suivre*).