ANDRÉ CAZAMIAN

# Sur les applications des propriétés de la strophoïde

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 14 (1895), p. 192-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__192_1>

# SUR LES APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DE LA STROPHOIDE [1];

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Les propriétés si intéressantes des points conjugués de la strophoïde sont très utiles à connaître dans l'étude d'un grand nombre de questions et servent à généraliser des résultats connus.

On trouve la strophoïde comme lieu géométrique dans plusieurs problèmes importants. En général, les points dont on cherche le lieu se présentent par groupes de deux, qui sont précisément les groupes de points conjugués, ce que l'on reconnaît facilement. Il en est ainsi, par exemple, dans les problèmes suivants :

Lieu des points de contact des tangentes menées à des coniques homofocales par un point.

Lieu des foyers des coniques bitangentes à une conique fixe en deux points fixes.

Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible, etc.

[1] Cette Note est le complément de celle parue en octobre 1893 dans les *Nouvelles Annales* sous ce titre : *Sur un lieu géométrique et ses applications*.

En appliquant les propriétés de la strophoïde, on pourra alors énoncer immédiatement diverses propositions.

Ainsi, puisque l'enveloppe des droites joignant les groupes de points conjugués est une parabole dont la directrice passe par le point double, on voit que l'enveloppe des polaires d'un point relativement à des coniques homofocales, l'enveloppe des axes des coniques bitangentes à une conique en deux points fixes, l'enveloppe des axes des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible, l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données et ayant pour directrice une droite donnée, etc., sont des paraboles.

Puisque la projection du point double sur la droite joignant deux points conjugués appartient à la strophoïde, on voit que le lieu des projections d'un point sur ses polaires par rapport à des coniques homofocales est la même strophoïde qui est le lieu des points de contact des tangentes, ou, en d'autres termes, que la projection d'un point sur sa polaire par rapport à une conique est le point de contact d'une conique homofocale tangente à cette polaire. On voit de même que le lieu des projections d'un point O sur les axes des coniques bitangentes à une conique aux points de contact des tangentes issues de O est la même strophoïde que le lieu de leurs foyers, etc.

Puisque le cercle circonscrit au triangle formé par le point double et deux points conjugués quelconques passe par un point fixe, on peut dire que, si d'un point on mène les tangentes à une conique, le cercle circonscrit au triangle formé par le point donné et les points de contact, passe par un point fixe quand la conique se déforme en gardant les mêmes foyers, etc.

Voici maintenant des théorèmes obtenus en utilisant cette remarquable propriété de la strophoïde : La droite joignant un point quelconque de la courbe au point double est bissectrice de l'angle des droites joignant le même point à deux points conjugués quelconques.

*a*. Si d'un point P on mène les tangentes à deux coniques homofocales, les droites joignant un point de contact M sur une conique aux points de contact sur l'autre ont pour bissectrice la droite MP.

*b. Lorsque deux coniques sont bitangentes, les droites joignant un foyer* F *de l'une aux deux foyers de l'autre ont pour bissectrice la droite joignant* F *au point de concours* O *des tangentes communes.*

Supposons que les deux points de tangence des coniques se réunissent en un seul, M; les deux coniques sont alors surosculatrices au point M; le point O est aussi venu en M et l'on a ce théorème :

*c. Lorsqu'une conique* Σ *est surosculatrice à une conique* S *au point* M, *la droite joignant un foyer* F *de* Σ *au point* M *est bissectrice de l'angle des droites joignant le même foyer* F *aux deux foyers de* S.

Par suite, en appliquant le théorème fondamental qui permet de reconnaître qu'un lieu est une strophoïde :

*Le lieu des foyers des coniques surosculatrices à une conique donnée en un point donné est une strophoïde ayant ce point pour point double.*

On pourrait ajouter que l'enveloppe des axes est une parabole, que le cercle circonscrit au triangle formé par le point de surosculation et deux foyers d'une conique passe par un point fixe, etc.

*d. Si l'on considère une conique inscrite dans un* *quadrilatère circonscriptible, la droite joignant un foyer de cette conique au centre du cercle bissecte les droites joignant le même foyer aux deux foyers de l'une quelconque des autres coniques inscrites.*

On pourrait multiplier ces exemples d'élégantes propositions obtenues en appliquant les propriétés de la strophoïde. Nous préférons montrer comment elles permettent de généraliser certains lieux connus.

Ainsi, on sait que le lieu des foyers des coniques bitangentes à une conique en deux points fixes est une strophoïde, mais le théorème est susceptible de plus de généralité.

Considérons une famille de coniques homofocales et un point O. Menons les tangentes OA, OB à une conique $\Sigma$ de la famille, et cousidérons une conique quelconque bitangente à $\Sigma$ aux points A et B. On voit facilement que ses foyers appartiennent à la strophoïde, lieu des points de contact des tangentes menées aux coniques $\Sigma$ par le point O. Ainsi :

*Étant donnée une famille de coniques homofocales* $\Sigma$, *si par un point fixe* O *on mène les tangentes à une conique quelconque de la famille, le lieu des foyers de toutes les coniques bitangentes à* CHACUNE *des coniques* $\Sigma$ *aux points de contact des tangentes issues de* O *est la même strophoïde* (1).

Voici deux autres exemples de ces généralisations :

1° *Étant donné un quadrilatère circonscriptible à*

(1) Ce système formé de coniques bitangentes à des coniques homofocales aux points de contact des tangentes menées par un point O du plan est celui que l'on obtient en coupant un système de quadriques homofocales par un plan.

Le point O est le point de contact de la quadrique tangente au plan de section.

*un cercle, le lieu des points de contact des tangentes (ou des pieds des normales) menées par le centre du cercle à toutes les coniques homofocales à* CHACUNE *des coniques inscrites dans le quadrilatère est la même strophoïde.*

C'est la strophoïde qui est en même temps le lieu des foyers, etc. (Voir *Sur un lieu géométrique et ses applications.*) A tout quadrilatère circonscriptible se trouve ainsi associée une strophoïde S qui jouit de propriétés extrêmement remarquables.

2° Le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux points fixes à une série de cercles concentriques est une strophoïde ayant son point double au centre des cercles, et les deux points donnés pour points conjugués. Mais ce lieu peut être généralisé bien davantage :

*On considère une famille de coniques homofocales* (S), *et une série de cercles concentriques* (C) *ayant pour centre un point quelconque* O *du plan. On mène les tangentes communes à un cercle* C *et à une conique* S. *Quelle que soit la conique de la famille et quel que soit le cercle de la série, le lieu des points de rencontre des tangentes communes est la même strophoïde.*

Elle a son point double en O et les deux foyers des coniques S sont deux points conjugués (les points du lieu se partagent d'ailleurs en couples de points conjugués, d'où l'énoncé de diverses remarques intéressantes).

*Rectification.* — Dans ma Note *Sur l'hyperbole équilatère et ses inverses*, j'ai dit, par inadvertance, que le point fixe R par lequel passent les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double et deux points conjugués quelconques était le milieu de la distance du point double au conjugué du point réel à l'infini (qui est le foyer singulier de la strophoïde). C'est le symétrique du point double par rapport au foyer singulier qu'il faut lire. Même rectification doit être faite dans les théorèmes où figure le point R (p. 273 et 276).