H. KAGAN

Démonstration nouvelle des équations fondamentales de la géométrie de l'espace de courbure constante négative

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 20-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__20_1>

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE DE COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE;

PAR M. H. KAGAN, à Saint-Pétersbourg.

La démonstration des formules trigonométriques et de l'équation fondamentale de la Géométrie de Lobatcheffsky, que j'ai l'honneur de présenter, comparée aux autres qui me sont connues, me paraît avoir l'avantage de déduire toute la théorie avec beaucoup de simplicité d'un seul théorème fondamental. Cette démonstration est fondée sur les principes suivants, qui se trouvent énoncés et démontrés dans toute exposition de la Géométrie de l'espace hyperbolique.

1. Une droite parallèle à une autre fait en chaque point, avec la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'autre droite du côté du parallélisme, un angle aigu (ω), variable avec la distance (x) de ce point à l'autre parallèle. Nous allons exprimer cette dépendance par l'équation

$$\omega = \Pi(x) \qquad \text{ou} \qquad x = \Phi(\omega)$$

(selon Lobatcheffsky). Tout angle aigu peut être considéré comme un angle de parallélisme.

2. Les deux côtés BA et BC d'un angle ABC étant parallèles aux côtés B′A′ et B′C′ d'un autre angle A′B′C′, qui est placé dans un autre plan, les deux plans se coupent et la droite d'intersection est parallèle aux droites BA et B′A′ dans une direction et aux deux autres BC et B′C′ dans la direction opposée.

3. La trajectoire orthogonale d'un système de parallèles, qui se trouvent dans un même plan, est une ligne courbe, que l'on appelle *cercle limite*. Elle jouit de la propriété fondamentale que chaque axe (c'est-à-dire l'une des parallèles qui coupent la courbe orthogonalement), qui passe par le milieu d'une corde, est perpendiculaire à cette droite et divise aussi l'arc en parties égales. La longueur d'un arc limite est parfaitement définie par sa corde.

4. La trajectoire orthogonale d'un système de parallèles dans l'espace est une surface courbe, nommée *sphère limite*, qui peut être produite par la révolution du cercle limite autour d'un de ses axes. L'intersection de cette surface avec un plan, qui contient un axe, est un cercle limite, avec tout autre plan, un cercle.

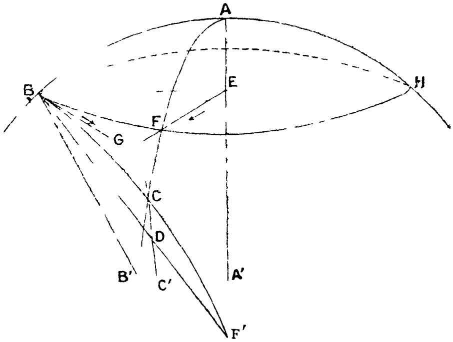
5. La Géométrie de la sphère limite est celle d'Eu-

clide. Les lignes géodésiques de cette surface sont des cercles limites.

Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental dont nous avons fait mention ci-dessus.

Soient AA′ et BB′ (*fig.* 1) deux axes d'une sphère

Fig. 1.



limite et AB un arc d'un cercle limite, qui est posé sur cette surface. Par le point B, menons un plan perpendiculaire à la droite AA′. Le cercle d'intersection de ce plan avec la sphère limite donnée peut être considéré comme un cercle plan, dont le centre est en E, ou bien comme un cercle géodésique, dont le rayon est BA et le centre se trouve en A. Menons la tangente rectiligne à ce cercle BG et la tangente géodésique BC. Toutes les deux se trouvent dans le même plan, qui contient l'axe BB′ et qui est perpendiculaire au plan des axes AA′ et BB′. Soit EF parallèle à BG. L'intersection de la surface avec le plan FEA′ est un cercle limite AC. Nous allons démontrer que les arcs AC et BC se coupent en un point C et que la longueur de l'arc BC est constante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la longueur AB.

En effet, comme EF || BG et EA′ || BB′, les plans B′BG et A'EF se coupent (*voir* n° 2) et la droite d'intersection CC' est parallèle à BB' et à BG. Le point C, où l'axe CC' rencontre la surface, appartient aux deux cercles limites AC et BC. En outre, la perpendiculaire, abaissée de B sur la droite CC', divise l'angle droit B'BG par moitié. Donc (*voir* n° 1)

$$\sphericalangle \mathrm{GBD} = 45^\circ \qquad \text{et} \qquad \mathrm{BD} = \Phi(45^\circ).$$

Si nous prolongeons la droite BD jusqu'à la seconde rencontre avec le cercle limite en E', la corde BE' = 2 BD aura une longueur constante; donc, l'arc BC $= \frac{1}{2}$ BE' a aussi une longueur constante, que nous désignons par l (*voir* n° 3). Le triangle géodésique ABC étant rectangle, on trouve, selon le n° 5,

$$\mathrm{AB} = l \cot \mathrm{A}.$$

Or, l'angle géodésique A a la même mesure que l'angle rectiligne BEF. D'autre part, BG étant perpendiculaire à BE, $\sphericalangle$ BEF = Π (BE). Donc, désignant la longueur de l'arc AB par s et le rayon BE par ρ, on trouve

$$\text{(I)} \qquad s = l \cot \Pi(\rho).$$

Cette équation détermine la longueur d'un arc de cercle limite en fonction de la perpendiculaire abaissée d'une extrémité de cet arc sur l'axe qui passe par l'autre extrémité.

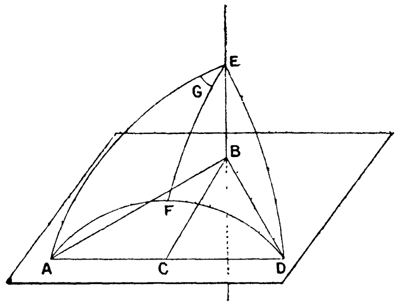
En posant encore arc BAH $= 2s = \sigma$ et BH $= \lambda$, on trouve l'équation

$$\text{(II)} \qquad \sigma = 2 l \cot \Pi \left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

qui constitue la dépendance entre la longueur d'un arc limite (σ) et la corde (λ).

Pour développer la trigonométrie plane de ces formules, considérons un triangle rectangle (*fig.* 2) ABC, dont l'hypoténuse soit désignée par c, et les cathètes par a et b. Prolongeons AC à une distance CD = AC et menons la droite BD. Prenons ensuite la perpendiculaire EB au plan du triangle pour axe et construisons la

Fig. 2.



sphère limite qui passe par le point A. Le point D se trouvera aussi sur cette surface, parce que la révolution autour de l'axe EB y amène le point A.

Soit E le point de rencontre de la surface avec l'axe EB. Le triangle géodésique AED étant équilatère, l'arc limite EF, qui passe par le milieu F de AD, fait un angle droit avec AF. Donc

$$AF = AE \sin\varphi,$$

φ désignant l'angle géodésique AEF dont la mesure est égale à celle de l'angle rectiligne ABC.

Or, selon les équations (I) et (II),

$$AE = l \cot \Pi(c), \qquad AF = \tfrac{1}{2} AD = l \cot \Pi(b);$$

donc

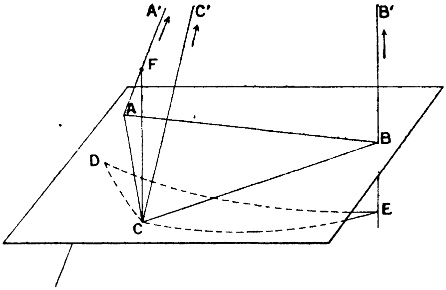
$$\text{(III)} \qquad \cot \Pi(b) = \cot \Pi(c) \sin B,$$

et, par analogie,

$$\text{(IV)} \qquad \cot \Pi(a) = \cot \Pi(c) \sin A.$$

Pour trouver la troisième équation, construisons de nouveau une sphère limite, mais qui passe maintenant par le sommet C (*fig.* 3) de l'angle droit; pour axe

Fig. 3.



nous conservons la perpendiculaire BB' au plan du triangle. Le triangle géodésique DEC est rectangle, parce que le plan ACC', contenant la droite AC, est perpendiculaire au plan C'CB; donc

$$\mathrm{DC} = \mathrm{CE}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{E}.$$

Mais, l'angle géodésique E ayant la même mesure que l'angle rectiligne B, l'équation précédente devient, selon la formule (I),

$$\cot \Pi(p) = \cot \Pi(a)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{B},$$

où p signifie la perpendiculaire CF abaissée du sommet C sur la parallèle AA'. Or, l'angle A'AC étant égal à $\Pi(b)$, l'équation (III), appliquée au triangle ACD, nous donne

$$\cot \Pi(p) = \cos \Pi(b),$$

et, après la substitution à l'équation précédente,

$$\text{(V)} \qquad \cos \Pi(b) = \cot \Pi(a)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{B}.$$

Les trois équations (III), (IV) et (V) déterminent toute la trigonométrie rectiligne. Pour en déduire toutes les dix équations du triangle rectangle, il ne faut qu'un procédé analytique d'élimination, que nous laissons au lecteur. Nous ne ferons mention que d'une seule équation, dont nous aurons besoin :

$$(\mathrm{VI}) \qquad \cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos B.$$

On l'obtient très facilement en éliminant l'angle $\Pi(b)$ entre les équations (V) et (III).

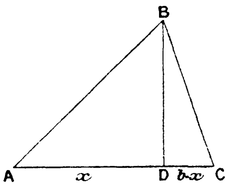
Pour passer au triangle obliquangle, menons la hauteur $BD = h$ du triangle ABC (*fig.* 4). Selon l'équation (III), nous tirons des triangles rectangles ABD et CBD

$$\cot\Pi(h) = \cot\Pi(c)\sin A,$$
$$\cot\Pi(h) = \cot\Pi(a)\sin C.$$

En éliminant $\cot\Pi(h)$ entre ces équations, nous trouvons

$$(\mathrm{VII}) \qquad \frac{\cot\Pi(a)}{\sin A} = \frac{\cot\Pi(c)}{\sin C} = \frac{\cot\Pi(b)}{\sin B}.$$

Fig. 4.



La troisième partie de cette équation est adjointe par analogie bien légitime.

En désignant le segment AD par x, nous tirons des mêmes triangles rectangles (VI)

$$(\mathrm{VIII}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\Pi(x) &= \cos\Pi(c)\cos A, \\ \cos\Pi(b-x) &= \cos\Pi(a)\cos C. \end{aligned} \right.$$

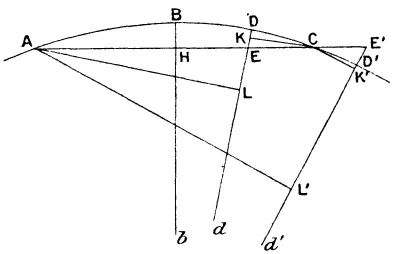
Pour trouver la troisième relation entre les angles et les côtés d'un triangle obliquangle, il ne faut qu'éliminer x entre les équations (VIII). Mais cette élimination n'est pas si simple, parce que ce n'est plus l'angle $\Pi(x)$ qui est à éliminer, mais la variable x elle-même. La réalisation de cette élimination exige une transformation de la fonction $\cos \Pi(b - x)$. Cette transformation fournit aussi l'expression analytique de la fonction $\Pi(x)$.

Pour effectuer la transformation dont il s'agit, considérons un cercle limite et menons par le milieu H (*fig.* 5) d'une corde AC, ainsi que par les points E et E′ arbitrairement choisis sur cette corde et sur son prolongement, les axes Bb, Dd; $D'd'$.

Comme nous voyons

$$(\alpha) \qquad \operatorname{arc} AC = \operatorname{arc} AD + \operatorname{arc} DC,$$

Fig. 5.



AL et CK étant perpendiculaires à Dd, l'équation (I) nous donne

$$\operatorname{arc} AD = l \cot \Pi(AL), \qquad \operatorname{arc} DC = l \cot \Pi(CK).$$

Désignons la demi-corde KC par x et le segment HE par y. Il est évident que l'angle HEL est égal à $\Pi(y)$; donc, selon l'équation (III), les triangles rectangles ALE et CKE nous donnent

$$\cot \Pi(AL) = \cot \Pi(x + y) \sin \Pi(y),$$
$$\cot \Pi(CK) = \cot \Pi(x - y) \sin \Pi(y).$$

Comme, selon l'équation (II),

$$AC = 2l \cot \Pi(x),$$

l'équation (α), après la substitution des valeurs trouvées, devient

$$(\beta) \quad \begin{cases} 2\cot\Pi(x) = [\cot\Pi(x+y) + \cot\Pi(x-y)]\sin\Pi(y), \\ \qquad [x \gtreqless y]. \end{cases}$$

D'autre part,

$$(\alpha') \qquad \text{arc } AC = \text{arc } AD' - \text{arc } CD'.$$

Désignons maintenant HC par y et HE' par x. L'angle CE'D' étant égal à $\Pi(x)$, nous transformons l'équation (α') par un procédé parfaitement analogue en

$$(\beta') \quad \begin{cases} 2\cot\Pi(y) = [\cot\Pi(x+y) - \cot\Pi(x-y)]\sin\Pi(x), \\ \qquad [x \gtreqless y]. \end{cases}$$

Comme les quantités x et y dans les équations (β) et (β') ne sont soumises qu'à la seule condition $x \gtreqless y$, nous pourrons leur attribuer la même valeur dans les deux équations, ce qui nous donne par élimination les formules bien connues

$$\cot\Pi(x+y) = \frac{\cos\Pi(y) + \cos\Pi(x)}{\sin\Pi(y)\sin\Pi(x)},$$

$$\cot\Pi(x-y) = \frac{\cos\Pi(x) - \cos\Pi(y)}{\sin\Pi(y)\sin\Pi(x)},$$

d'où nous trouvons sans peine

$$(\gamma) \qquad \cos\Pi(x+y) = \frac{\cos\Pi(x) + \cos\Pi(y)}{1 + \cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

$$(\delta) \qquad \cos\Pi(x-y) = \frac{\cos\Pi(x) - \cos\Pi(y)}{1 - \cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

sans ambiguïté, parce que toutes les quantités qui y figurent sont positives.

En éliminant $\cos\Pi(x)$ des équations (VIII) au moyen de l'équation (δ), nous trouvons la troisième équation trigonométrique du triangle obliquangle

$$\cos\Pi(b)[1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos A\cos C]$$
$$=\cos\Pi(a)\cos C+\cos\Pi(c)\cos A.$$

En outre, l'équation (γ) nous donne

$$\frac{1+\cos\Pi(x+y)}{1-\cos\Pi(x-y)}=\frac{1+\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(x)}\,\frac{1+\cos\Pi(y)}{1-\cos\Pi(y)},$$

ou bien

$$\text{(IX)}\qquad \cot\tfrac{1}{2}\Pi(x+y)=\cot\tfrac{1}{2}\Pi(x)\cot\tfrac{1}{2}\Pi(y).$$

Comme la seule fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y),$$

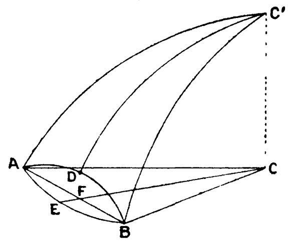
x et y étant parfaitement arbitraires, est $\varphi(x)=a^x$, nous trouvons

$$\cot\tfrac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{k}}.$$

C'est l'équation fondamentale de la Géométrie de Lobatcheffsky. Pour compléter la théorie, il ne reste qu'à déterminer la constante k.

Soient AEB (*fig.* 6) un arc de cercle, C son centre, C′

Fig. 6.



son centre géodésique sur la sphère limite à laquelle il appartient. Le triangle rectiligne ACB et le triangle géodésique AC′B sont équilatères. D et F étant les milieux de l'arc ADB et de la corde AB, nous désignons AF par λ, AD par σ. Soient r le rayon plan AC du cercle,

ρ le rayon géodésique AC′. Il est évident que

$$\sigma = \rho \sin\frac{\omega}{2} = l \cot\Pi(r) \sin\frac{\omega}{2},$$

$$\cot\Pi(\lambda) = \cot\Pi(r)\sin\frac{\omega}{2},$$

ω désignant la mesure commune des angles AC′B et ACB. Si cet angle devient infiniment petit, la corde 2λ le devient aussi et le rapport

$$\cot\Pi(\lambda):\lambda = \frac{e^{\frac{\lambda}{k}} - e^{-\frac{\lambda}{k}}}{2\lambda}$$

tend vers $\frac{1}{k}$. Donc

$$\lim\frac{2\sigma}{2c} = \frac{e}{k} \qquad (\omega = 0).$$

Or, cette limite est égale à 1; donc $k = e$, et

$$\cot\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{\frac{x}{e}},$$

$2l$ désignant la longueur d'un arc limite dont les axes extrêmes font des angles de $45°$ avec sa corde.

Remarquons encore que la formule (I) détermine bien simplement la longueur de la circonférence de cercle. En effet, ρ étant son rayon géodésique et r son rayon plan,

$$C = 2\pi\rho = 2\pi l \cot\Pi(r).$$