NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

B. KAGAN

Note sur une formule bien connue de la géométrie imaginaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 251-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__251_1>

NOTE SUR UNE FORMULE BIEN CONNUE DE LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE;

PAR M. B. KAGAN.

On sait bien que l'aire (Δ) d'un triangle rectiligne dans l'espace hyperbolique est proportionnelle à la différence $2d - (A + B + C)$, A, B, C étant les angles de ce triangle. Si l'on prend pour unité l'aire (δ) du triangle, dans lequel cette différence est égale à l'unité angulaire (ce qui est toujours possible, pourvu que celle-ci soit moindre que $2d$), on tire de cette relation l'équation fondamentale

$$\Delta = 2d - A - B - C, \tag{1}$$

qui ne dépend pas du choix de l'unité angulaire, parce que celle de surface lui est proportionnelle. Pour un triangle, rectangle en C, cette formule devient

$$\Delta = d - A - B.$$

Si la cathète AC $(=b)$ reste invariable, tandis que l'autre cathète AB $(=a)$ augmente infiniment, $<$ B tend vers o et $<$ C vers $\Pi(b)$. Donc

$$(2) \qquad \lim \Delta - d - \Pi(b) \qquad (a - \infty).$$

Pour passer de la géométrie imaginaire à celle d'Euclide, il ne faut que poser

$$\Pi(x) = \text{constante} = d.$$

Donc la formule (2) nous donne pour l'espace euclidien

$$(2\,a) \qquad \lim \Delta = 0.$$

Or, on sait bien que cette limite est égale (dans ce cas-ci) à ∞. Il est clair que ce n'est qu'une contradiction apparente. Dans l'équation (1), Δ désigne la mesure de l'aire du triangle, c'est-à-dire son rapport à l'aire δ. En l'exprimant explicitement, on reçoit

$$(3) \qquad \frac{\Delta}{\delta} = 2d - A - B - C.$$

Dans l'espace euclidien, le triangle, dont l'aire est prise pour unité ci-dessus, n'existe pas; pour unité de surface y est adoptée la double aire $(2\delta')$ d'un triangle rectangle, dont les cathètes sont égales à l'unité de longueur. L'équation $(2\,a)$ n'exprime que la proposition suivante : le rapport de l'aire d'un triangle rectangle, dont une des cathètes est constante et l'autre augmente infiniment, à celle d'un triangle (δ), pour lequel $2d - A - B - C$ est égal à l'unité angulaire, tend vers o avec la courbure de l'espace. La contradiction apparente ci-dessus interprétée convenablement conduit à la conclusion, que le rapport $\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$ augmente infiniment, quand la courbure négative de l'espace tend vers zéro.

Il s'agit, en premier lieu, de constater analytiquement cette affirmation. En second lieu, nous allons présenter quelques considérations où la formule (2) trouve son application.

A, B et C étant les angles d'un triangle rectiligne dans l'espace de courbure constante négative, a, b et c les côtés opposés, on a

$$\sin\Pi(a)(\cos A + \cos B\cos C) = \sin B \sin C. \tag{4}$$

D'autre part,

$$\left\{\begin{aligned} \sin\Pi(x+y) &= \frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},\\ \cos\Pi(x+y) &= \frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En conséquence,

$$\left\{\begin{aligned} \sin\Pi(2x) &= \frac{\sin^2\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)},\\ \cos\Pi(2x) &= \frac{2\cos\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

d'où l'on tire sans peine

$$\left\{\begin{aligned} \sin\Pi\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{2\sin\Pi(x)}{1+\sin\Pi(x)}},\\ \tang\Pi(x) &= \sqrt{\frac{2\sin\Pi(x)}{1-\sin\Pi(x)}}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

où le radical doit être compté positif pour les valeurs positives de l'argument x.

En combinant les formules (4) et (7), on reçoit

$$\operatorname{tang}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}},$$

$$\sin\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{A+C-B}{2}\cos\frac{C+B-A}{2}}},$$

ou bien, en vertu de la relation (3),

$$\operatorname{tang}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)\sin\left(A+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)}},$$

$$\sin\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)\sin\left(C+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)}}.$$

Ces formules, combinées avec celles que l'on en tire par analogie, nous donnent

$$\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)}{\sin C}.$$

Or, h_a désignant la hauteur AD du triangle ABC, abaissée du sommet A, on tire du triangle rectangle ADC,

$$\sin C=\cot\Pi(h_a)\operatorname{tang}\Pi(b).$$

Après la substitution de cette expression, la formule précédente devient

$$\sin\Pi\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)=\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{tang}\Pi(b)\cot\Pi(h_a).$$

Or, une simple combinaison des formules (7) donne

$$(8)\qquad \cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}\Pi(b)=\frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right),$$

et l'on reçoit finalement

$$(9) \quad \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right) = \frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cot\Pi(h_a).$$

Dans le cas où le triangle est rectangle en C,

$$h_a = b;$$

si on le substitue dans l'équation (9) et que l'on y applique de nouveau la relation (8), on reçoit

$$\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right) = \sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right).$$

En particulier,

$$(10) \quad \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\delta'}{\delta}\right) = \sin\Pi\left(\frac{c'}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{1}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{1}{2}\right),$$

où c' désigne l'hypoténuse du triangle rectangle équilatère, dont les cathètes sont égales à l'unité de longueur.

Comme il en a été déjà fait mention, les équations (1) et (3) ne dépendent que du choix de l'unité angulaire. On peut donc la choisir de telle manière que $2d = \pi$, ce qui revient à mesurer l'angle par le rapport de l'arc correspondant à son rayon géodésique sur la sphère limite. Alors il est permis de substituer en (9) et (10), au lieu de $\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)$, l'argument $\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)$, celui-ci devenant infiniment petit. Si la courbure $-\frac{1}{l^2}$ de l'espace tend vers o, les côtés a, b, c du triangle restant finis, les rapports $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$, $\frac{c}{l}$ deviennent infiniment petits. Comme il est permis, dans ce cas, de substituer au lieu de

$\sin \Pi(a)$, $\tang \Pi(a)$, ..., 1 et $\frac{a}{l}$, ..., en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs, on voit (9), (10) que les rapports $\frac{\Delta}{\delta}$ et $\frac{\delta'}{\delta}$ tendent aussi vers o. Donc les équations (9) et (10) deviennent

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{h_a}{l}, \tag{11}$$

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{2}\frac{1}{l}\frac{1}{l}. \tag{12}$$

En divisant ces équations l'une par l'autre, on reçoit la formule euclidienne

$$\lim \frac{\Delta}{2\delta'} = \frac{1}{2}\frac{a}{1}\frac{h_a}{1} \qquad (l = \infty).$$

En outre, l'équation (12) prouve que

$$\lim \frac{\delta'}{\delta} = 0 \qquad (l = \infty). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il est évident que le sens de cette proposition est purement analytique. C'est seulement dans le cas où on l'applique à des ensembles, dans lesquels on peut passer de l'un à l'autre en conservant la même unité de longueur, qu'elle admet une interprétation réelle.

La circonférence (C) et l'aire (K) du cercle s'expriment dans la géométrie imaginaire par les formules suivantes

$$C = 2\pi \cot \Pi(r), \tag{13}$$

$$K = 4\pi \cot^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right). \tag{14}$$

Donc, pour la surface (σ) d'un secteur, dont l'arc a la longueur s, on a l'expression suivante :

$$\sigma = \frac{s\,K}{C} = \frac{2s\cot^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}{l\cot\Pi(r)}$$

ou bien, en la transformant au moyen de la formule (8),

$$\sigma = \frac{s}{l}\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

En désignant par 2Δ l'aire du triangle qui est formé par les deux rayons extrêmes et la corde (2λ) du secteur, et par τ celle du segment, on reçoit

$$\tau = \frac{s}{l}\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - 2\Delta.$$

Si le rayon du cercle augmente infiniment, l'arc (s) s'approche de l'arc (s') du cercle limite, qui correspond à la corde (2λ). Or

$$s' = 2\,l\cot\Pi(\lambda);$$

donc

$$\lim\left[\frac{s}{l}\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right] = 2\cot\Pi(\lambda) \qquad (r=\infty).$$

D'autre part, selon la formule (2),

$$\lim(2\Delta) = \pi - 2\Pi(\lambda) \qquad (r=\infty).$$

La démonstration de la formule (14) suppose, essentiellement, que les arcs du cercle sont mesurés par leur rapport à leur rayon géodésique, ce qui nous oblige d'exprimer $2d$ par π. En conséquence,

$$\tau' = \lim\tau_{(r=\infty)} = 2\cot\Pi(\lambda) + 2\Pi(\lambda) - \pi,$$

τ' désignant l'aire du segment d'un cercle limite, dont la corde est égale à 2λ.

Comme la mesure de cette surface est toujours positive, on a

$$(15) \qquad 2\cot \Pi(\lambda) + 2\pi(\lambda) > \Pi \qquad (\lambda > 0).$$

Or

$$\cot \Pi(\lambda) = \frac{e^{\frac{\lambda}{l}} - e^{-\frac{\lambda}{l}}}{2}, \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{l}}.$$

En substituant ces expressions dans l'inégalité (15), on reçoit

$$(16) \qquad 4 \operatorname{arc\,tang} e^{-\frac{\lambda}{l}} + e^{\frac{\lambda}{l}} - e^{-\frac{\lambda}{l}} > \Pi \qquad (\lambda > 0)$$

ou bien

$$(17) \qquad 4 \operatorname{arc\,cot} e^{\frac{\lambda}{l}} + e^{\frac{\lambda}{l}} - e^{-\frac{\lambda}{l}} > \Pi \qquad (\lambda > 0).$$

Si l'on pose enfin dans (16) $e^{-\frac{\lambda}{l}} = z$ et dans (17) $e^{\frac{\lambda}{l}} = z$, on en tire

$$4 \operatorname{arc\,tang} z + \frac{1}{z} - z > \pi \qquad (z < 1),$$

$$4 \operatorname{arc\,cot} z + z - \frac{1}{z} > \Pi \qquad (z > 1).$$

Ces inégalités admettent certainement une démonstration analytique; les considérations qui précèdent leur donnent l'interprétation géométrique.