NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-N. BARISIEN

Sur le centre de courbure des podaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 471-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__471_1>

SUR LE CENTRE DE COURBURE DES PODAIRES.

Au sujet de la Lettre de M. MAURICE D'OCAGNE (1);

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Par une coïncidence heureuse, en même temps que la lettre de M. d'Ocagne, le numéro de mars 1895 des

(1) *Nouvelles Annales*, p. 111; mars 1895.

Nouvelles Annales publiait (p. 89) un Article sur les podaires successives d'une courbe. La formule que j'ai donnée à la page 93,

$$R_1 = \frac{r^2}{2r - R_0 \sin V},$$

permet de trouver sur la figure de M. d'Ocagne (p. 112) la longueur de $P\omega$ et montre que cette longueur est R_1.

Conservons la notation de l'article précité et posons

$$\widehat{OQ\omega} = \varphi, \qquad \widehat{QO\gamma} = \psi.$$

On a

$$PN = OM = r, \qquad \widehat{OMN} = \widehat{OPN} = V - 90^\circ, \qquad M\gamma = R_0.$$

On a, dans le triangle $PQ\omega$,

$$\frac{\overline{P\omega}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\varphi + V - 90^\circ)}.$$

Or, $PQ = \frac{r}{\sin V}$; donc

$$(1) \qquad \overline{P\omega} = \frac{r \operatorname{tang}\varphi}{\sin V(\operatorname{tang}\varphi \sin V - \cos V)}.$$

Il reste à exprimer $\operatorname{tang}\varphi$. Or, dans le triangle OQK, on a

$$(2) \qquad \frac{\sin\varphi}{OK} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{OQ}.$$

Mais

$$OK = \frac{O\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin V},$$

$$OQ = \frac{r\cos^2 V}{\sin V},$$

$$\operatorname{tang}\psi \equiv \frac{ON}{N\gamma} = \frac{-r\cos V}{R_0 - r\sin V},$$

$$\sin\psi = \frac{-r\cos V}{\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin V}},$$

$$\cos\psi = \frac{R_0 - r\sin V}{\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin V}}.$$

De (2), on tire

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{OK}\sin\psi}{\mathrm{OQ} - \mathrm{OK}\cos\psi}.$$

En y substituant les valeurs précédentes, on obtient

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{-r\sin V\cos V}{r(1+\cos^2 V) - R_0 \sin V},$$

valeur qui, portée dans (1), donne

$$\overline{\mathrm{P}\omega} = \frac{r^2}{2r - R_0 \sin V}.$$

Donc, $P\omega = R_1$. Le point ω défini par M. d'Ocagne est bien le centre de courbure de la podaire correspondant au point P. J'arrive ainsi à une démonstration analytique du théorème de M. d'Ocagne.

Il serait d'ailleurs intéressant, d'après le *desideratum* exprimé par M. d'Ocagne, de trouver une démonstration géométrique directe de cette propriété.