NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CALINON

Le théorème de Gauss sur la courbure

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 63-65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__63_1>

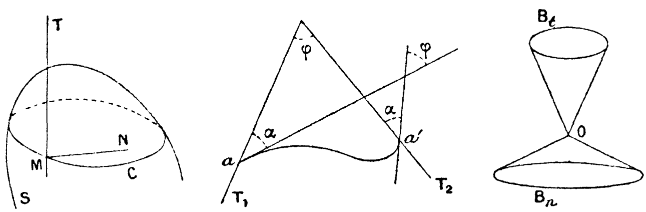
[O5p] LE THÉORÈME DE GAUSS SUR LA COURBURE;

PAR M. A. CALINON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous supposerons d'abord démontrée la proposition suivante :

C étant une courbe située sur une surface S, et D une surface développable circonscrite à S le long de C, on développe cette surface D sur un plan, et, après ce développement, C est devenue une courbe plane C'; prenons sur C et C' deux arcs correspondants quelconques s et s'; la courbure géodésique de l'arc s sur la surface S est égale à la courbure plane de l'arc s' situé dans le plan de développement.

Cela posé, considérons en un point M de la courbe C la génératrice rectiligne T de la surface développable D et la normale N à la surface S. Développons D en coupant cette surface suivant la génératrice T, laquelle donne ainsi en développement deux génératrices T_1 et T_2 : la courbe C se développe alors suivant une courbe c qui coupe T_1 et T_2 en a et a' sous le même angle α; il en résulte qne les tangentes en a et a' à la courbe c font le même angle φ que les génératrices T_1 et T_2 : donc l'angle φ de T_1 et de T_2 est la courbure plane de la courbe c ou la courbure géodésique de la courbe C sur la surface S.



Au centre O d'une sphère de rayon unité, construisons deux cônes respectivement parallèles d'une part aux génératrices T, d'autre part aux normales N, le premier cône ayant pour base sur la sphère la courbe B_t et le second la courbe B_n.

En développant le cône de base B_t sur un plan, la courbe B_t devient un arc de cercle dont l'angle au centre est évidemment égal à l'angle de développement φ de la surface développable engendrée par T. Ainsi la longueur de la courbe B_t est la courbure géodésique de la courbe C.

Mais la normale N est évidemment normale au plan tangent suivant MT à la surface développable engendrée par T; donc les deux cônes de base B_t et C_n sont supplémentaires et, si σ est l'aire sphérique comprise dans *la courbe* B_n, *on a* $B_t + \sigma = 2\pi$ *ou* $\varphi + \sigma = 2\pi$. Mais l'aire σ est, par définition, la courbure totale de la portion de la *surface* S *comprise dans la courbe* C; par suite, la formule $\sigma = 2\pi - \varphi$ exprime le théorème de Gauss.