NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KLEIN

Sur « l'arithmétization » des mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 114-128

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__114_1>

SUR « L'ARITHMÉTIZATION » DES MATHÉMATIQUES;

Discours prononcé par M. KLEIN devant la Société royale des Sciences de Gœttingue (*Göttinger Nachrichten*, 1895; Cahier II).

(Traduit avec l'autorisation de M. KLEIN par MM. VASSILIEF, professeur à l'Université de Kazan et L. LAUGEL).

Messieurs,

Si les théories spéciales de la Science mathématique, par la nature même des choses, échappent à l'entendement de ceux qui sont étrangers à cette étude et, par suite, ne les intéressent pas, le mathématicien, néanmoins, doit essayer de signaler les points de vue généraux sous lesquels il voit le développement de sa Science, et cela d'autant plus que ces points de vue permettent de préciser sa corrélation avec les domaines scientifiques voisins. Je voudrais aussi, en l'occasion actuelle, essayer de prendre position par rapport à cette importante direction mathématique, qui a pour principal représentant M. Weierstrass, dont nous venons de célébrer le quatre-vingtième anniversaire. Je parle de l'*Arithmétization des Mathématiques* (*Arithmetizirung*). Mais, auparavant, je dois exposer quelques éclaircissements relatifs aux origines et aux tendances de cet ordre d'idées.

On associe généralement à la définition des Mathématiques l'idée d'un système de déductions rigoureusement logique qui est pour lui-même sa propre base; nous en avons un exemple dans la *Géométrie* d'Euclide. Toute autre est la pensée qui préside à la naissance de la Mathématique moderne. Partant de l'observation de la nature, ayant pour but l'éclaircissement de ses phénomènes, cette pensée place en tête un principe philosophique, *le principe de la continuité*. C'est ce qui a lieu chez les grands promoteurs Newton et Leibnitz, et pendant le XVIIIe siècle tout entier qui est, à proprement parler, un siècle de découvertes au point de vue du développement des Mathématiques. Mais, peu à peu, renaît une critique plus rigoureuse qui demande une sanction logique des audacieuses découvertes, ainsi qu'il arrive lorsqu'un gouvernement s'établit après une époque de conquête prolongée. C'est la période de Gauss et Abel, de Cauchy et Dirichlet. Mais on n'en est pas resté là. Gauss use encore sans hésiter, comme principe de démonstration, de l'intuition de l'espace et, en particulier, de l'intuition de la continuité de l'espace. Mais une recherche plus approfondie a montré non seulement qu'il reste ainsi beaucoup à démontrer, mais encore que l'intuition de l'espace a conduit d'une façon trop précipitée à admettre comme légitimes en toute généralité des propositions qui ne le sont pas. D'où *la demande d'une méthode de démonstration exclusivement arithmétique*. On ne regarde alors comme bien acquis à la Science que ce qui peut être démontré avec clarté comme identiquement exact par l'application des opérations usuelles du calcul. Un simple coup d'œil jeté sur les nouveaux Traités de Calcul différentiel et intégral fait suffisamment apercevoir les grands changements dans les méthodes. Où l'on employait autrefois les figures comme moyen de démonstration, l'on trouve aujourd'hui des considérations toujours réitérées, relatives aux grandeurs qui sont ou peuvent devenir plus petites que toute grandeur assignée, si petite qu'elle soit. Comme point de départ, nous avons alors l'examen et l'éclaircissement de ces questions : que doit-on entendre ou ne pas entendre par continuité d'une variable et quand peut-il être, en général, question de la différentiation ou de l'intégration d'une fonction? Tel est l'*habitus* mathématique de Weierstrass; c'est ce que l'on nomme brièvement, suivant l'usage habituel, *la rigueur de Weierstrass* (*die Weierstrass' sche Strenge*).

Cette rigueur, naturellement, n'a rien d'absolu; elle peut même être poussée plus loin si l'on soumet encore la dépendance mutuelle des grandeurs à des restrictions plus étroites. A ce point de vue, je citerai la tendance de Kronecker à bannir les nombres irrationnels et à ramener le traitement des problèmes de la Science mathématique à l'étude des relations entre les seuls nombres *entiers*. Je citerai encore les efforts que l'on a faits pour introduire, dans les différentes espèces de combinaisons logiques, des notations abrégées, afin d'en exclure les associations d'idées superflues, les indéterminations qui s'y glissent inconsciemment quand on emploie le langage habituel et qui restent ainsi sans contrôle. Un savant italien, Peano, de Turin, à qui nous devons déjà d'intéressantes études sur d'autres sujets, est le représentant de cet ordre d'idées.

Je voudrais définir tous ces développements par un seul mot : l'*Arithmétization des Mathématiques*. Et maintenant, je me propose de vous parler de l'influence, que pourrait avoir cette tendance générale, au delà du domaine de l'Analyse, sur les autres parties de notre Science. La question ainsi posée, d'une part, nous devons admettre volontiers l'extraordinaire importance des développements du sujet; mais, d'autre part, il nous faut repousser cette idée que, dans la Science ainsi arithmétizée, nous aurions, comme en un extrait concentré, l'ensemble total proprement dit de la Mathématique existant déjà. D'après ceci, je développerai ma pensée en deux directions : l'une, positive, qui affirme, et l'autre, négative, qui nie. Comme essence même de la question, ce n'est pas la forme arithmétique de la marche des idées que j'envisage, mais plutôt l'acuité logique, la rigueur, que l'on obtient à l'aide de cette forme; la nécessité, par suite, se présente (et c'est là le côté positif de mon programme) de *refondre* et remanier, en s'appuyant sur les principes de l'Analyse à base arithmétique, les autres disciplines de la Mathématique. D'autre part, je dois établir, et cela en y insistant beaucoup (c'est ici le côté négatif de la question) que les Mathématiques n'ont été nullement créées à l'aide de la déduction logique, mais bien plutôt qu'à côté de cette dernière, même encore de nos jours, l'intuition conserve son rôle, son influence spécifique complète. Pour épuiser le sujet, je devrais encore parler du côté algorithmique des Mathématiques et, par conséquent, du rôle des méthodes formelles ; néanmoins, je laisserai de côté, en cette occasion, ce sujet qui est plus éloigné de mes recherches personnelles.

Du reste, ne croyez pas que j'aie beaucoup de nouveau à développer ici sur des sujets particuliers. Il s'agit plutôt essentiellement de réunir et de grouper ce que nous avons sous la main et, lorsque cela est nécessaire, d'en présenter une justification.

Le court laps de temps qui m'est octroyé m'oblige à me restreindre à faire ressortir quelques points principaux. Permettez-moi d'abord de donner une esquisse du côté positif de ma thèse dans ses rapports avec le domaine de la Géométrie. Le point de départ de l'arithmetization des Mathématiques a, comme je l'ai indiqué, tiré son origine de cette circonstance que l'on a écarté l'intuition de l'espace. Lorsque nous portons nos études sur la Géométrie, la première chose à faire c'est de rattacher par un lien nouveau à l'intuition de l'espace les résultats acquis par voie arithmétique. Par ceci j'entends que nous devons admettre les principes habituels de la Géométrie analytique et à leur aide faire la recherche de l'interprétation géométrique des nouveaux développements analytiques. Ce n'est pas en général difficile, mais, d'autre part, c'est intéressant au plus haut degré. J'ai pu poursuivre cet ordre d'idées en diverses nombreuses directions dans une série de conférences que j'ai données dans ce but l'an dernier [1]. Comme résultat on acquiert une habitude, un exercice de l'intuition de l'espace provenant d'un raffinement, d'une acuité plus grande dans cet ordre d'idées ; et, d'autre part, cette tendance a cet avantage précieux qu'elle met en pleine lumière les développements ana-

---

[1] Voir la note p. 116.

lytiques en question et qui perdent alors un caractère paradoxal qui, maintes fois, semblait leur être attaché. Quelle est la définition la plus générale d'une courbe, d'une surface? Qu'entend-on en disant qu'une courbe, etc., est *analytique* ou *non analytique?* Ces questions et celles qui leur sont analogues doivent être épuisées jusqu'à l'évidence la plus complète. Le second point à considérer est celui-ci. C'est que nous introduisons les principes qui servent de fondement à la Géométrie dans les nouvelles recherches. Cela pourrait se faire certes comme autrefois d'une manière purement géométrique; mais, par l'effet des influences actuelles, la corrélation avec le système de tout l'ensemble de l'Analyse, et par conséquent avec les méthodes de la Géométrie analytique, est placée au premier plan. La recherche extérieure des formules par lesquelles on peut représenter les constructions de l'espace, la Géométrie non-euclidienne par conséquent, et ce qui s'y rattache, tout cela n'est qu'un côté du sujet.

Une question plus profonde est celle-ci. Pourquoi pouvons-nous regarder l'ensemble des points de l'espace comme une multiplicité numérique telle que nous puissions, entre les nombres rationnels, rangés, comme l'on sait, en trois directions, interpoler les nombres irrationnels? Nous arrivons ainsi à cette opinion: l'intuition de l'espace présente quelque chose d'inexact que nous idéalisons pour faire des Mathématiques à l'aide de ce que l'on nomme des *axiomes* (qui représentent pour nous des *postulata* réels, des propositions de condition). Quant aux philosophes, le problème ici posé a été en particulier traité par Kerry, enlevé, depuis, par une mort prématurée. Je crois pouvoir adhérer en général aux idées qu'il développe, et notamment à ce qui est relatif à sa critique de du Bois-Reymond.

Inversement la nouvelle exposition de la conception de l'espace est pour nous la source de nouvelles conceptions analytiques. Nous croyons voir dans l'espace le nombre infini des points et des constructions formées par ceux-ci d'une manière immédiate. C'est là l'origine des recherches formant la base de l'étude des ensembles (Mengen) et des nombres transfinis, au moyen desquels Georg Cantor a enrichi la Science arithmétique d'un cercle d'idées tout nouveau. Enfin nous exigeons encore que le nouvel ordre d'idées joue un rôle dans les domaines les plus élevés de la Géométrie et en particulier dans la Géométrie infinitésimale; cela aura lieu encore le plus facilement si nous conservons ici encore les méthodes de la Géométrie analytique. Naturellement je ne parle pas de calculs aveugles pratiqués sur les lettres x, y, z, mais seulement d'un usage subsidiaire de ces grandeurs partout où il s'agit de la fixation précise d'un passage à la limite.

Telle est à grands traits l'esquisse du nouveau programme géométrique. Il est, comme vous le voyez, bien différent des tendances qui régnaient dans la première moitié de notre siècle et qui en ce temps ont conduit au développement de la Géométrie projective (laquelle depuis longtemps est devenue une branche intégrante de notre Science). La Géométrie projective nous a ouvert de nombreux domaines nouveaux de la Science avec la facilité la plus grande; on pourrait la célébrer à bon droit en disant qu'elle ouvre *une route royale* conduisant à travers son domaine. Au contraire, notre nouveau chemin est pénible et hérissé de ronces; il faut une attention de chaque instant pour en tourner les obstacles.

Nous revenons ainsi plutôt aux méthodes des anciens et nous apprenons à comprendre en même temps d'une nouvelle manière leurs méthodes à l'aide de nos conceptions modernes, comme l'a exposé brillamment Zeuthen en ces derniers temps. Les mêmes courants d'idées ont été introduits dans les domaines de la Mécanique et de la Physique mathématique. Pour ne pas entrer en trop de détails je citerai seulement deux exemples à cet effet. Dans toutes les Mathématiques appliquées, on doit faire ce que j'ai déjà indiqué comme nécessaire relativement à l'intuition de l'espace, c'est-à-dire idéaliser les points de départ en vue du traitement mathématique. Maintenant, en général, selon le but que l'on a devant les yeux, en un seul et même domaine on peut employer à côté les uns des autres divers genres d'idéalisation. Dans cet ordre d'idées, pour ne citer qu'un exemple, on regarde la matière, tantôt comme remplissant l'espace d'une manière continue, tantôt comme discontinue et formée de molécules séparées, qu'on regarde aussi soit au repos, soit animées de mouvement. Quand et jusqu'à quel point ces diverses méthodes de présentation sont-elles mathématiquement équivalentes pour les développements que l'on veut en tirer? Les anciennes recherches de Poisson et d'autres, comme aussi les développements de la théorie cinétique des gaz, n'approfondissent pas à ce point de vue suffisamment les choses pour le mathématicien de notre époque. Je crois qu'une publication que prépare M. Boltzmann fournira sur ceci d'intéressants résultats. Une autre manière de poser la question est la suivante : L'expérience physique met à notre disposition des faits expérimentaux auxquels nous donnons inconsciemment une généralisation mathématique et que nous transportons comme théorèmes sur des êtres idéalisés. A ceci se rattache l'existence de la fonction dite *de Green* relative à une surface fermée quelconque et à pôle pris arbitrairement, ce qui correspond à ce fait du domaine de l'électricité que pour chaque corps conducteur, sous l'influence d'un point électrisé quelconque, il y a une distribution d'électricité en équilibre. Tel est le cas encore de l'application que j'ai faite des courants électriques qui ont lieu sur une surface conductrice quelconque quand on y applique les électrodes d'une pile galvanique; j'ai ainsi montré notamment que ces considérations conduisent immédiatement aux théorèmes fondamentaux de la théorie riemannienne des fonctions abéliennes ([1]). A cet ordre d'idées appartient encore ce théorème que tout corps élastique limité est susceptible d'une série infinie d'oscillations harmoniques, et bien d'autres propositions encore. Ces théorèmes pris d'une manière abstraite sont-ils effectivement des théorèmes mathématiquement exacts et rigoureux; autrement dit, comment doit-on les limiter, les préciser pour qu'ils deviennent parfaitement vrais? Les mathématiciens ont porté sur ceci leurs efforts avec succès; d'abord Karl Neumann et Schwarz, dans la théorie du potentiel, et depuis les savants français, en continuant dans la voie ouverte par les travaux allemands, sont parvenus à ce résultat que les théorèmes tirés de la Physique se sont en grande mesure révélés comme exacts. Vous voyez ici clairement de quoi il s'agit relativement aux recherches en question, et je désire attirer votre attention sur ceci : il s'agit, non de nouveaux points de vue, mais plutôt de méthodes de démonstrations abstraites que nous cultivons pour elles-mêmes en vue de la clarté et

([1]) Klein, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Teubner, 1882.

de la précision qui sont introduites ainsi dans notre compréhension des phénomènes; ou encore, si j'ose employer une expression de Jacobi, dans un sens d'ailleurs légèrement modifié, il s'agit seulement de l'*honneur de l'intelligence humaine.*

Messieurs, il devient maintenant presque difficile d'assurer à l'intuition, en contradiction avec les développements précédents, la part qui lui revient dans notre Science, et, cependant, c'est sur cette antithèse, précisément, que repose la signification propre de mon exposé. Et j'ai moins en vue cette forme cultivée de l'intuition, dont il était question tout à l'heure, intuition qui s'est développée sous l'influence de la déduction logique, et que je pourrais nommer une forme de la mémoire, que cette intuition naïve, qui, pour une grande part, est un talent inné et qui, d'ailleurs, s'élargit inconsciemment par l'effet de l'étude approfondie de telle ou telle partie de la Science. Le mot *intuition* n'est peut-être pas très convenablement choisi. Je voudrais y comprendre encore ce sentiment, cet instinct de la Mécanique par lequel un ingénieur apprécie la distribution des forces dans une construction quelconque dont il est l'auteur, et, de même, cet instinct indéfinissable que possède le calculateur exercé relativement à la convergence des opérations infinies qui se présentent à lui.

Je dis que *l'intuition mathématique ainsi comprise précède partout dans son domaine le raisonnement logique, et, par conséquent, en tout instant, possède une plus vaste région que ce dernier.*

Je pourrais introduire ici d'abord une excursion historique qui montrerait, en effet, que l'intuition a inauguré les commencements dans les diverses branches de notre Science et que le traitement rigoureux et logique n'est venu qu'ensuite. Et certes ceci est vrai, non seulement en grand dans l'histoire des origines du Calcul infinitésimal, ainsi que je l'ai indiqué en commençant, mais il en est encore ainsi dans bien des doctrines, dont le commencement date du siècle présent. A ce sujet, pour ne citer qu'un fait, je rappellerai la théorie des fonctions d'une variable complexe de Riemann; j'ajouterai encore volontiers ceci, c'est que la discipline qui, pendant bien longtemps, a semblé la plus étrangère à l'intuition, je parle de la théorie des nombres, vient de prendre un nouvel et brillant essor par l'introduction des méthodes intuitives entre les mains de Minkowski et d'autres. Il serait aussi d'un grand intérêt de poursuivre, à ce point de vue, l'étude du développement, non d'une discipline mathématique particulière, mais d'une personnalité mathématique individuelle. Je me contenterai ici d'une indication; les deux plus puissants chercheurs du temps présent, Lie, de Leipzig, et Poincaré, de Paris, ont pris, à l'origine, leur point de départ dans l'intuition.

Mais tout ceci, si je voulais entrer en plus de détails, me conduirait à considérer trop de particularisations, et, en même temps, seulement des cas exceptionnels. Je préfère donc décrire ce qu'une intuition tant soit peu exercée accomplit journellement, en dépassant le traitement par le calcul ou les constructions, dans la résolution quantitative de problèmes physiques ou techniques. Si je reviens, par exemple, aux deux problèmes relatifs à l'électricité, dont j'ai déjà parlé, on reconnaît que chaque physicien, dans le cas donné, peut, sans difficulté, assez exactement déterminer la forme des surfaces de niveau de la fonction de Green, ou les courants dans la seconde desdites expériences. Ou bien prenez encore le cas d'une équation différentielle quelconque, par exemple (pour rester dans le cas le plus simple) d'une équation différentielle du premier ordre entre deux variables. Le traitement analytique très probablement échouera. Néanmoins, on peut tout de suite indiquer, par un procédé graphique, la marche générale des courbes intégrales, comme cela a été fait tout récemment par Lord Kelvin, un des grands maîtres de l'intuition mathématique, pour une équation différentielle célèbre du problème des trois corps. Il s'agit, dans tous les cas analogues, pour parler le langage de l'Analyse, d'une sorte d'interpolation où l'on tient compte, moins de l'exactitude des détails que de l'appréciation des conditions générales. J'affirmerai encore ceci : dans l'établissement de toutes nos lois naturelles, ou, en général, lorsque nous cherchons à formuler mathématiquement des phénomènes extérieurs, quels qu'ils soient, nous employons un artifice analogue d'interpolation. Il s'agit, toujours, en effet, d'extraire du milieu de l'ensemble de perturbations accidentelles les liaisons simples des grandeurs essentielles. C'est là, en dernier lieu, ce que j'ai appelé précédemment le procédé de l'idéalisation. Les considérations de la logique reprennent tous leurs droits seulement lorsque l'intuition a déjà réalisé complètement le problème de l'idéalisation.

Je vous prie de regarder ces indications, non comme une explication, mais comme une simple description des relations entre les faits. Le mathématicien ne peut que constater par l'observation personnelle la nature propre du fait psychique qui a lieu dans chaque cas particulier. Peut-être un jour la Physiologie et la Psychologie expérimentales nous renseigneront-elles exactement sur les relations plus intimes qui peuvent exister entre les *processus* dérivant de l'intuition et ceux qui sont du domaine du pouvoir logique. Qu'il s'agisse ici, en effet, de facultés de l'âme distinctes, c'est-à-dire qui ne sont pas nécessairement reliées entre elles, c'est ce que nous démontrent les grandes différences que nous révèlent les observations faites sur divers individus. Les psychologues modernes distinguent une faculté visuelle, une faculté motrice et une faculté auditive. Il semblerait que l'intuition mathématique, comme je la comprends, correspondrait plutôt aux deux premières, et la compréhension logique plutôt à la dernière. La Psychologie est au commencement de ces recherches, auxquelles, avec nombre de mes Collègues, je prends le plus grand intérêt. En effet, nous avons l'espoir que maintes différences d'opinion sur notre Science et son exercice, différences qui restent maintenant inébranlables, disparaîtront lorsque nous serons plus exactement renseignés sur les conditions psychologiques de la pensée mathématique et sur ce qui les différencie individuellement entre elles.

Je n'insisterai ici que brièvement sur le côté pédagogique de la Mathématique. Nous observons maintenant en Allemagne, sous ce rapport, un fait très remarquable. Deux courants opposés coulent à côté l'un de l'autre sans réagir l'un sur l'autre d'une manière appréciable. Les maîtres de nos *gymnases* affirment avec tant d'énergie la nécessité d'un enseignement mathématique basé sur l'intuition, que l'on est obligé de s'y opposer et d'insister, au contraire, sur la nécessité de développements logiques approfondis. Telle est la tendance d'un petit écrit, que j'ai publié sur les problèmes de la Géométrie élémentaire, pendant le courant de l'été dernier (¹). Mais c'est tout le contraire chez les pro-

---

(¹) F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von* F. Tagert, Teubner; 1895. — Il en a fesseurs de nos écoles supérieures : l'intuition, la plupart du temps, est non seulement estimée de peu de valeur, mais même, si c'est possible, toujours rejetée de côté. C'est là, sans aucun doute, une conséquence de l'extrême importance qu'ont prise les tendances à l'arithmetization dans les Mathématiques modernes. Mais ici l'on va au delà du but. Il est temps de déclarer une fois pour toutes publiquement qu'il ne s'agit pas seulement d'une direction à rebours dans la pédagogie, mais encore d'une tendance à regarder l'ensemble de la Science sous une perspective oblique. Pour moi, je laisse à tout *docent* académique le champ le plus libre, et j'ai, par conséquent, toujours refusé de proposer des règles générales pour l'enseignement mathématique supérieur. Ce qui ne m'empêche pas d'affirmer hautement qu'il y a en tout cas deux catégories de cours (*Vorlesungen*) mathématiques qui doivent prendre nécessairement leur point de départ dans l'intuition. Ce sont premièrement les cours élémentaires, qui préparent le commençant aux hautes Mathématiques ; car le maître doit, conformément à la nature des choses, parcourir en petit la même voie de développement que la Science a suivie en grand. Ce sont ensuite les cours dont les auditeurs doivent avoir en vue, dès le premier abord, de travailler essentiellement avec l'intuition, c'est-à-dire les cours pour ceux qui étudient les Sciences naturelles [1] (*Naturforscher*) et pour les ingénieurs. Nous avons, par l'exagération de la forme logique, déjà trop perdu, en

---

été rendu compte dans le *Bulletin* de M. Darboux, 2e série, t. XX ; mars 1896. — M. Griess, professeur au lycée d'Alger, qui a traduit les *Applications of elliptic functions* de Greenhill, en a publié récemment une rédaction française. Nony, éditeur.

[1] Y compris la Physique, etc., dans le même ordre d'idées que le *Natural Philosophy* des Anglais.

ces domaines de la Science, de l'importance générale qui, par la nature des choses, appartient aux Mathématiques; il est grandement temps, et c'est un strict devoir pour nous, de reconquérir cette importance par une conduite conforme à ce but.

Je reviens encore aux considérations théoriques. La conception générale que j'ai concernant les problèmes actuels de la Science mathématique n'a guère besoin d'être formulée d'une manière plus spéciale. En même temps que j'exige partout l'étude logique complète et approfondie des matériaux, j'affirme également que l'on doit aussi nécessairement les travailler et les envisager sous tous les aspects à l'aide de l'intuition et de ses méthodes. Les développements mathématiques qui tirent leur origine de l'intuition ne peuvent d'autre part être admis comme possession définitive de la Science que lorsqu'ils ont été ramenés à une forme logique rigoureuse. Réciproquement, le traitement abstrait des relations logiques ne peut nous suffire, tant que leur portée n'a pas été vivifiée à l'aide de chaque mode d'intuition et tant que nous n'apercevons pas les combinaisons multiples qui relient le *schéma* logique, dans le domaine que nous avons choisi, avec les autres parties de nos connaissances.

Je compare la Science mathématique à un arbre dont les racines s'enfoncent chaque jour plus profondément dans la terre, tandis qu'au-dessus les branches s'étendent librement et nous ombragent. Devons-nous en regarder les racines ou les branches comme la partie la plus essentielle? Le botaniste nous enseigne que la question est mal posée et que la vie de l'organisme dépend plutôt de l'*échange mutuel entre ses différentes parties*.