Nouvelles annales de mathématiques

A. Mannheim

Sur la déviation dans l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 249-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__249_1>

[$L^1 4a$]

SUR LA DÉVIATION DANS L'ELLIPSE;

PAR M. A. MANNHEIM.

M. d'Ocagne a publié dans ce Journal, sous le titre : *De la déviation dans l'ellipse* (3), un article, déjà an-

(1) *Mathematische Annalen*, B. 2, S. 13.

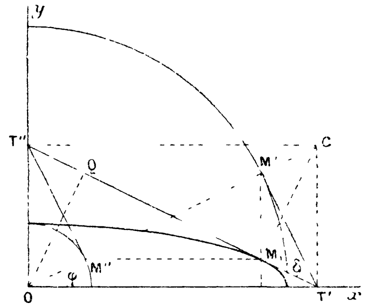
(2) *Journal de Liouville*, t. XVIII. — *Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique*.

(3) *Voir* Tome V, troisième série, p. 370 et 534; 1886.

cien, au sujet duquel voici quelques remarques géométriques.

M. d'Ocagne appelle *déviation de l'ellipse au point* M, *l'angle* δ, *que la tangente* T′T″ *à l'ellipse, en ce point, fait avec les tangentes correspondantes* T′M′, T″M″ *aux cercles décrits sur les axes de l'ellipse comme diamètres.* Il cherche la position du point de l'ellipse pour lequel cet angle atteint son maximum, et donne quelques propriétés relatives à ce point.

Lorsque δ est maximum, pour un déplacement infiniment petit de M_1 sur l'ellipse, sa variation de grandeur est nulle. L'angle $M_1T'M'$ est alors de forme inva-



riable et donne lieu au centre instantané de rotation C, qui est sur la normale à l'ellipse en M_1, sur le rayon OM′, et enfin sur la perpendiculaire T′C à Ox.

On peut dire la même chose pour l'angle $M_1T''M''$; le point C est donc aussi sur la perpendiculaire T″C à Oy.

Le point C étant le centre instantané relatif au déplacement de T′T″, *ce segment est de grandeur invariable pour un déplacement infiniment petit de* M_1 *sur l'ellipse.*

Déplaçons T′T″ d'une façon continue dans l'angle xOy; le point M_1 marqué sur ce segment, décrit alors une ellipse qui n'est autre que l'ellipse donnée, puisque ces deux courbes ont leurs axes dirigés suivant Ox, Oy et qu'au point M_1 la droite M_1C est une normale qui leur est commune. Il résulte de là que M_1 *partage* $T'T''$ *en deux segments respectivement égaux aux demi-axes de l'ellipse donnée.*

Par suite, OC est égal à la demi-somme des axes de l'ellipse, et alors *le segment* M_1C *est égal au demi-diamètre conjugué de* OM_1. Abaissons la perpendiculaire OQ sur $T'T''$. Le rayon de courbure de l'ellipse en M_1 est égal au carré du demi-diamètre parallèle à $T'T''$ divisé par OQ. Mais ce demi-diamètre est égal à M_1C, qui est égal à OQ, donc *le rayon de courbure en* M_1 *est égal à* OQ, ou autrement *on obtient le centre de courbure de l'ellipse pour le point* M_1, *en projetant le centre* O *sur la normale à l'ellipse en ce point.*

La longueur M_1C étant moyenne proportionnelle entre M_1T' et M_1T'', demi-axes de l'ellipse, est facile à déterminer. Avec le segment ainsi obtenu, pour rayon, on décrit du point O une circonférence de cercle. On construit ensuite une tangente à ce cercle de façon que le segment QT' compris entre son point de contact et l'axe Ox soit égal au demi grand axe de l'ellipse; sur cette tangente on prend le symétrique de Q par rapport au milieu de $T'T''$, et l'on obtient le point M_1. Il est facile de retrouver les expressions données par M. d'Ocagne, relatives à l'angle de déviation maximum. Pour arriver à ces expressions, M. d'Ocagne a fait usage de celle qu'il a d'abord établie, et qui donne, quel que soit le point pris sur l'ellipse, la valeur de δ connaissant l'anomalie excentrique φ.

Si, dans cette expression de δ, on donne une autre signification aux lettres qu'elle renferme, on obtient la formule ([1]) qui détermine, pour une ligne de courbure en un point d'une surface, la tangente de l'angle que fait, avec le plan tangent en ce point à cette surface, l'axe de courbure de cette ligne de courbure.

Cette remarque pourrait donner lieu à un examen particulier.