NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur le déplacement d'un triangle variable semblable à un triangle donné

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 474-476

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__474_1>

[O8e]

SUR LE DÉPLACEMENT D'UN TRIANGLE VARIABLE SEMBLABLE A UN TRIANGLE DONNÉ;

Par M. M. d'OCAGNE.

Par une voie indirecte, M. Tarry a été amené au théorème suivant :

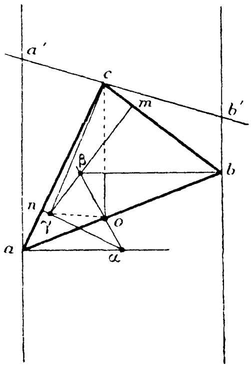
Si les sommets a et b du triangle abc, semblable à un triangle fixe, décrivent deux droites parallèles aa' et bb', l'ordre de la courbe décrite par le sommet c est égal à la classe de la courbe enveloppe du côté ab.

J'ai donné de ce théorème une démonstration par les coordonnées parallèles d'où j'ai déduit, en outre, quelques autres remarques (¹). Je vais l'établir ici par une méthode purement géométrique, en observant d'ail-

(¹) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VIII, p. 528, et t. IX, p. 471.

leurs qu'il suffit pour cela de faire voir que si le côté ***ab*** pivote autour d'un point, le sommet ***c*** décrit une droite.

Remarquons d'abord que les angles ***a***, ***b*** et ***c*** étant



constants, les normales $o\alpha$ et $n\alpha$ aux enveloppes des côtés ab et ac se coupent en un point α de la normale en a à la courbe que décrit ce point, c'est-à-dire de la perpendiculaire $a\alpha$ à aa'. De même les normales $o\beta$ et $m\beta$ se coupent sur la perpendiculaire $b\beta$ à bb', et la normale $c\gamma$ au lieu décrit par c passe par le point de rencontre γ des normales $n\alpha$ et $m\beta$.

En outre, le triangle $\alpha\beta\gamma$ ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux du triangle abc est semblable à ce triangle [1].

En raison du parallélisme des droites $a\alpha$ et $b\beta$, on a

$$\frac{o\alpha}{o\beta} = \frac{oa}{ob}.$$

Il en résulte que les droites oc et $o\gamma$ sont homologues dans les deux triangles et, par suite, que les triangles

---

[1] Cas particulier d'une propriété donnée par M. Mannheim dans son *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition, p. 171.

$oc\gamma$ et $ob\beta$ sont semblables. Donc, l'angle que $c\gamma$ fait avec son homologue $b\beta$ est égal à l'angle cob, et, si nous prenons la tangente $a'b'$, en c, à la courbe que décrit ce point, c'est-à-dire la perpendiculaire à $c\gamma$. nous voyons que l'angle que cette tangente fait avec bb', perpendiculaire à $b\beta$, est égal à l'angle cob.

De là ce théorème :

L'angle que la tangente à la courbe décrite par le point c fait avec la direction des parallèles aa' et bb' est égal à l'angle que la droite joignant le point c au point o, où le côté ab touche son enveloppe, fait avec ce côté.

La propriété énoncée plus haut résulte immédiatement de ce dernier théorème. En effet, *si le côté ab pivote autour du point o*, le rapport $\frac{oa}{ob}$ étant constant, l'angle que oc fait avec ab l'est aussi ; par suite, la tangente à la courbe que décrit le point c a une direction constante et *cette courbe est une droite.*