NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. LAGOUTINSKY

Sur une intégrale d'un problème sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 149-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__149_0>

[R4b]

SUR UNE INTÉGRALE D'UN PROBLÈME SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE;

PAR M. M. LAGOUTINSKY.

Les équations différentielles de l'équilibre d'un fil sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}(\mathrm{T}x') + k\mathrm{X} = 0, \\ \dfrac{d}{ds}(\mathrm{T}y') + k\mathrm{Y} = 0, \\ \dfrac{d}{ds}(\mathrm{T}z') + k\mathrm{Z} = 0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0,$$

où X, Y, Z désignent les composantes des forces appliquées au fil, T la tension, k la densité, x, y, z les coordonnées d'un élément du fil, la variable indépendante s l'arc du fil, x', y', z' dérivées des fonctions x, y, z par rapport à s.

Dans ce qui suit, nous supposons que X, Y, Z sont des fonctions des variables x, y, z et s.

Proposons-nous de trouver trois fonctions U, V, W des variables x, y, z, x', y', z' et s, linéaires par rapport à x', y', z', telles que l'expression

$$\mathrm{P} = \mathrm{U}\frac{d}{ds}(\mathrm{T}x') + \mathrm{V}\frac{d}{ds}(\mathrm{T}y') + \mathrm{W}\frac{d}{ds}(\mathrm{T}z')$$

multipliée par ds devienne, en vertu de (2), une différentielle exacte, et de déterminer, s'il est nécessaire, les conditions que doivent remplir X, Y, Z pour que l'expression

$$\mathrm{Q} = k\mathrm{XU} + k\mathrm{YV} + k\mathrm{ZW}$$

multipliée par ds soit une différentielle exacte. Alors l'équation

$$\int P\,ds + \int Q s = C$$

donnera une intégrale du système (1) et (2).

La première condition mène à l'équation

$$\frac{d}{ds}(Ux' + Vy' + Wz') = Ux'' + Vy'' + Wz'', \tag{3}$$

ou, en réduisant,

$$x'\frac{dU}{ds} + y'\frac{dV}{ds} + z'\frac{dW}{ds} = 0. \tag{4}$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à s, nous aurons

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0. \tag{5}$$

En vertu des équations (2) et (5) on peut remplacer cette équation par la suivante

$$x'\frac{dU}{ds} + y'\frac{dV}{ds} + z'\frac{dW}{ds} - \lambda F - \mu G = 0. \tag{6}$$

où F et G désignent respectivement les premiers membres des équations (2) et (5).

La comparaison des termes renfermant les dérivées secondes des variables x, y, z donne

$$\frac{\partial U}{\partial y'} = \frac{\partial U}{\partial z'} = \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial z'} = \frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{\partial W}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial W}{\partial z'} = \mu.$$

On peut donc poser

$$U = \mu x' + f_1,$$
$$V = \mu y' + f_2,$$
$$W = \mu z' + f_3.$$

où μ, f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions des seules variables x, y, z et s. En portant ces valeurs des fonctions U, V, W dans l'équation (6) et comparant les termes semblables, nous obtiendrons, pour la détermination des fonctions μ, f_1, f_2 et f_3, le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial z} - 0. \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0.$$

L'intégration complète de ce système n'introduit pas des fonctions arbitraires en vertu du théorème de M. C. Bourlet (*A. E. N.*, 1891; *Supp.*) et donne pour la solution

$$\begin{aligned}
\mu = {} & a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 s + a_5(x^2 + y^2 + z^2 + s^2) \\
& + 2a_6 xs - 2a_7 ys - 2a_8 zs, \\
f_1 = {} & a_9 - a_4 x + a_{10} y + a_{11} z - a_1 s - a_6(x^2 - y^2 - z^2 + s^2) \\
& - 2a_7 xy - 2a_8 xz - 2a\,.xs, \\
f_2 = {} & a_{12} - a_{10} x - a_4 y + a_{13} z - a_2 s + a_7(x^2 - y^2 + z^2 - s^2) \\
& - 2a_6 xy - 2a_8 yz - 2a_5 ys, \\
f_3 = {} & a_{14} - a_{11} x - a_{13} y - a_4 z - a_3 s + a_8(x^2 - y^2 - z^2 - s^2) \\
& - 2a_6 xz - 2a_7 yz - 2a_5 zs,
\end{aligned}$$

où a_i sont des constantes arbitraires.

Considérons maintenant l'expression Q ds, qui devient en vertu de ce qui précède

$$k\mu X\,dx + k\mu Y\,dy + k\mu Z\,dz + (kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z)\,ds.$$

On peut donc écrire les conditions cherchées sous deux formes différentes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} k\mu X &= \frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ k\mu Y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ k\mu Z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z},\\ kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z &= \frac{\partial\varphi}{\partial s},\end{aligned}\right.$$

ou

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(k\mu X)}{\partial y} &= \frac{\partial(k\mu Y)}{\partial x},\\ \frac{\partial(k\mu X)}{\partial z} &= \frac{\partial(k\mu Z)}{\partial x},\\ \frac{\partial(k\mu X)}{\partial s} &= \frac{\partial(kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z)}{\partial x},\\ \frac{\partial(k\mu Y)}{\partial z} &= \frac{\partial(k\mu Z)}{\partial y},\\ \frac{\partial(k\mu Y)}{\partial s} &= \frac{\partial(kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z)}{\partial y},\\ \frac{\partial(k\mu Z)}{\partial s} &= \frac{\partial(kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z)}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

En éliminant les quantités kX, kY, kZ entre les équations (7) nous aurons

$$f_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

En intégrant cette équation on peut donc trouver l'expression générale des fonctions X, Y, Z, la densité k étant donnée. Si les conditions (7) et (8) sont remplies, nous trouverons, d'après ce qui précède, une intégrale des équations (1) et (2) sous la forme

$$(9)\qquad (f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' + \mu)T + \varphi = C.$$

Cette intégrale renferme comme cas particuliers beaucoup d'intégrales connues.

Prenons, par exemple, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, $\mu = 1$. Alors d'une part l'équation (9) donne la tension, d'autre part les conditions (8) démontrent qu'il existe une fonction des forces.

Prenons en second lieu $\mu = 0$; nous aurons par conséquent

$$\begin{aligned} f_1 &= a_9 + a_{10}y + a_{11}z, \\ f_2 &= a_{12} - a_{10}x + a_{13}z, \\ f_3 &= a_{14} - a_{11}x - a_{13}y. \end{aligned}$$

et au lieu de (7) et (8)

$$(10) \qquad kf_1\mathrm{X} + kf_2\mathrm{Y} + kf_3\mathrm{Z} = \psi,$$

où ψ est une fonction arbitraire d'une seule variable s.

L'intégrale (9) prendra la forme

$$(11) \qquad (f_1x' + f_2y' + f_3z')\mathrm{T} + \int \psi\, ds = \mathrm{C}.$$

Nous reviendrons de la sorte aux cas indiqués récemment (*N. A.*, 1897; p. 248, III, 2) par M. N. Saltykoff.

On peut, comme conclusion, remarquer que le système des équations (1) et (2) peut avoir deux ou plusieurs intégrales de la forme (9). Comme un exemple de ce fait je puis signaler l'article déjà cité (*N. A.*, 1897; p. 248, III, 1).