

R. DEDEKIND

## Sur les équations à coefficients rationnels

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 17  
(1898), p. 201-204

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1898\\_3\\_17\\_\\_201\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__201_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[A3c]

SUR LES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS RATIONNELS;

PAR M. R. DEDEKIND, de Brunswick.

*Jahresbericht der D. M. V.*, Tome I, 1897 (G. Reimer, Berlin).

(Traduit par M. L. LAUGEL.)

L'existence de théorèmes sur les équations, légitimes pour un degré quelconque fini, mais qui ne peuvent être admis pour des équations de degré infiniment grand sans discussion préalable, est un fait aujourd'hui reconnu par tous les mathématiciens. Mais comme la décision à rendre n'est pas toujours facile à trouver, je prends la liberté de traiter ici un cas particulier qui n'est pas sans importance. Dans la théorie des équations qui sont de degré *fini* et ont tous leurs coefficients *rationnels*, on démontre le théorème connu suivant :

I. *Lorsque l'équation irréductible  $\varphi(x) = 0$  a une racine commune avec l'équation  $\psi(x) = 0$ , chaque racine de la première équation est aussi une racine de la seconde.*

Mais ce théorème, lorsque le degré de l'équation  $\psi(x) = 0$  est *infinitement grand*, cesse en général d'être exact, et ce fait a lieu même pour de telles équations dont le premier membre  $\psi(x)$  est une série de puissances à coefficients rationnels, convergente pour *toutes* les valeurs de  $x$ . C'est là une conséquence évidente du théorème :

II. Si nous désignons par  $\alpha$  un nombre réel quelconque, IL EXISTE une telle équation  $\psi(x) = 0$  de degré *infinitement grand*, ou même de degré fini, qui a pour UNIQUE racine RÉELLE  $\alpha$ .

A-t-on démontré l'exactitude de cette proposition, il en résulte une évidente contradiction avec le théorème I, lorsque l'on choisit pour  $\alpha$  une racine d'une équation irréductible  $\varphi(x) = 0$  (par exemple  $x^2 - 2 = 0$ ) qui admet au moins deux racines réelles  $\alpha$  et  $\beta$ . Il ne s'agit donc par conséquent que de démontrer le théorème II, et l'on n'a ici besoin que de considérer le cas de  $\alpha$  positif, puisque le cas opposé s'y ramène en remplaçant  $x$  par  $-x$ ; au cas  $\alpha = 0$ , l'on peut naturellement prendre  $\psi(x) = x$ .

De tout nombre positif  $\alpha$ , d'une manière analogue et avec le même mode de détermination que, lors d'un développement en fraction continue usuelle, on déduira une suite de nombres entiers  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , et une suite de restes correspondants, c'est-à-dire de nombres  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  qui satisfont tous à la condition

$$0 \leq \varepsilon < 1.$$

à l'aide de la règle suivante :

On posera d'abord

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \varepsilon_1.$$

où  $a_1$  est déterminé comme étant le plus grand nombre entier contenu dans  $\frac{1}{\alpha}$ ,  $\varepsilon_1$  étant, par conséquent, déterminé comme reste; mais pour chaque indice  $n$  plus grand l'on posera

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \dots \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \dots,$$

tous les nombres  $a$  suivants comme plus grands entiers et tous les restes  $\varepsilon$  sont de la sorte parfaitement déterminés. Il est clair, du reste, qu'aucun des nombres  $a$  n'est négatif.

Alors la fonction parfaitement définie

$$\psi(x) = -1 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^3}{1.2} + a_3 \frac{x^5}{1.2.3} + \dots + a_n \frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} \dots$$

possède toutes les propriétés énoncées dans le théorème II. En effet :

1° Les coefficients de  $\psi(x)$  sont tous des nombres rationnels.

2° Puisque  $\varepsilon_{n-1} < 1$ , par conséquent  $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$ , et le terme général de la série  $\psi(x)$  est inférieur, en valeur absolue, à

$$\frac{x}{\alpha^2} \frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

d'où il résulte, comme l'on sait, que la série  $\psi(x)$  (comme il en est de la série exponentielle) converge pour chaque valeur de  $x$ .

3° De la définition des nombres  $a$  et  $\varepsilon$ , il résulte que la somme formée de  $n+1$  termes

$$-1 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^3}{1.2} + a_3 \frac{x^5}{1.2.3} + \dots + a_n \frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

est égale à

$$-\varepsilon_n \frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)},$$

et, comme cette somme pour  $n$  croissant sans limite devient infiniment petite, il en résulte  $\psi(\alpha) = 0$ ; autrement dit,  $\alpha$  est une *racine* de l'équation  $\psi(x) = 0$ .

4° Puisque aucun des nombres  $a$  n'est négatif, mais qu'à la vérité au moins l'un d'eux est positif [en vertu de  $\psi(\alpha) = 0$ ], et comme ensuite, abstraction faite du terme constant  $-1$ , la variable  $x$ , dans la série, se présente élevée seulement à des puissances d'exposant impair,  $\psi(x)$ , en même temps que  $x$ , parcourra toujours en croissant la totalité du domaine réel depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$  et, par conséquent aussi, ne prendra la valeur zéro que pour l'*unique* valeur  $x = \alpha$ ; autrement dit, l'équation  $\psi(x) = 0$  n'admet *aucune racine réelle, hormis  $\alpha$* .

C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré que le théorème I est *sujet à caution* pour les équations  $\psi(x) = 0$  de degré infiniment grand. Cette démonstration n'est certes pas sans valeur, car divers géomètres sont arrivés à penser que, en appliquant ce théorème, sujet à caution, à l'exemple

$$\psi(x) = \sin x,$$

on pourrait obtenir une démonstration de la transcendance du nombre  $\pi$  qui n'exigerait qu'un petit nombre de lignes.

La démonstration du théorème II, c'est facile à voir, peut être modifiée d'une foule de manières. Il est, en même temps, clair que le théorème est aussi valable pour un nombre quelconque fini de racines réelles  $\alpha$  assignées d'avance (1).

---

(1) M. Dedekind me prie de mentionner ici un Mémoire de M. A. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. XIV; 1889) où la même question a été traitée d'une manière beaucoup plus générale. (L. L.)