Nouvelles annales de mathématiques

Henri Piccioli

Note sur les géodésiques du cône

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 207-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__207_0>

[O51]

NOTE SUR LES GÉODÉSIQUES DU CONE;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

M. Enneper ([1]) a trouvé par le premier que, le long d'une géodésique du cône, le rapport des deux rayons de première et deuxième courbure est exprimé par une fonction linéaire de l'arc de la même ligne. Ensuite, M. Pirondini ([2]) a montré que ces géodésiques sont caractérisées par la propriété d'avoir les plans osculateurs à la même distance du sommet, et il en a donné l'équation intrinsèque de plusieurs manières, indépendamment de la remarquable propriété trouvée. On peut, d'une manière très simple et élégante, arriver à la recherche de cette équation : c'est ce que je me suis proposé de montrer dans cette Note.

Soient

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ (\cos\xi, \cos\varphi, \cos\zeta)\ (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale d'une courbe gauche L, dont s est l'arc, ρ et T étant les rayons de courbure et $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un point fixe de l'espace. Si x, y, z sont les coordonnées courantes d'un point de la courbe, exprimées par l'arc s, posons

$$(1)\quad \begin{cases} A = (x_0 - x)\cos\alpha + (y_0 - y)\cos\beta + (z_0 - z)\cos\gamma, \\ B = (x_0 - x)\cos\xi + (y_0 - y)\cos\varphi + (z_0 - z)\cos\zeta, \\ C = (x_0 - x)\cos\lambda + (y_0 - y)\cos\mu + (z_0 - z)\cos\nu. \end{cases}$$

([1]) *Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung* (*Math. Annalen*, Band 19; 1882.)

([2]) *Sulle linee a doppia curvatura* (*Giornale di Matematiche*: 1888)

A, B, C seront les distances du point P_0 aux plans : normal, rectifiant et osculateur de L respectivement.

Remarquons les relations qui lient ces quantités :

$$(2)\qquad \frac{dA}{ds}=\frac{B}{\rho}-1,\qquad \frac{dB}{ds}=-\frac{A}{\rho}-\frac{C}{T},\qquad \frac{dC}{ds}=\frac{B}{T};$$

on les obtient en différentiant les relations (1) et en tenant compte des formules de Serret.

Supposons d'abord que la courbe L ait ses plans osculateurs équidistants du point P_0 : ce qui correspond à faire C constant. Dans cette hypothèse, les formules (2) montrent que B est nul. Il en résulte que tous les plans rectifiants passent par P_0 et que la développable rectifiante de L est le cône qui la projette du point P_0 et duquel elle est une géodésique.

Cela posé, on voit facilement que les relations (2) conduisent à l'équation

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)=\frac{1}{C},$$

qui nous montre que $\frac{\rho}{T}$ est exprimé par une fonction linéaire de l'arc.

Réciproquement, supposons que pour une ligne on ait

$$\frac{\rho}{T}=as+b\qquad (a,\, b \text{ const.}).$$

Les expressions

$$x+\frac{1}{a}\left(\cos\lambda-\frac{\rho}{T}\cos\alpha\right),$$

$$y+\frac{1}{a}\left(\cos\mu-\frac{\rho}{T}\cos\beta\right),$$

$$z+\frac{1}{a}\left(\cos\nu-\frac{\rho}{T}\cos\gamma\right).$$

ayant pour dérivées respectives

$$\left[1 - \frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)\right]\cos\alpha, \qquad \left[1 - \frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)\right]\cos\beta,$$
$$\left[1 - \frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)\right]\cos\gamma,$$

on aura, x_0, y_0, z_0 étant trois constantes,

$$x + \frac{1}{a}\left(\cos\lambda - \frac{\rho}{T}\cos\alpha\right) = x_0,$$
$$y + \frac{1}{a}\left(\cos\mu - \frac{\rho}{T}\cos\beta\right) = y_0,$$
$$z + \frac{1}{a}\left(\cos\nu - \frac{\rho}{T}\cos\gamma\right) = z_0.$$

Il suit de là

$$(x_0 - x)\cos\lambda + (y_0 - y)\cos\mu + (z_0 - z)\cos\nu = \frac{1}{a},$$

et par conséquent notre ligne, ayant ses plans osculateurs à la même distance du point $(x_0 y_0 z_0)$, est une géodésique du cône qui la projette de ce même point.