

N. SALTYKOW

**Sur la théorie des équations linéaires  
aux dérivées partielles du premier  
ordre d'une seule fonction**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 18  
(1899), p. 533-543

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1899\\_3\\_18\\_\\_533\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__533_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

[H8]

**SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION ;**

PAR M. N. SALTYKOW.

---

1. Le point capital de la théorie des équations en question consiste à réduire leur intégration aux équations aux différentielles ordinaires ou totales. On en connaît deux méthodes fondées sur les idées d'illustres géomètres, Lagrange et Jacobi. Toutefois les recherches qui vont suivre semblent avoir un intérêt au point de vue didactique.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \dots + X_{n-1} p_n = X,$$

où  $X_1, X_2, \dots, X$  sont des fonctions des variables in-  
*Ann. de Mathémat.*, 3<sup>e</sup> série, t. XVIII. (Décembre 1899.) 34

dépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et de leur fonction inconnue  $z$ , les  $p_i$  désignant les dérivées partielles  $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ .

Supposons que la relation

$$(2) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C$$

définit une solution de l'équation (1),  $C$  étant une constante arbitraire. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i = 0,$$

et, par suite, l'égalité

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + X_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} + X \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

est identiquement vérifiée.

Inversement, la relation (2) fournit une intégrale de l'équation (1), si  $f$ , considérée comme fonction des variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ , vérifie l'équation (3). En effet, comme on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\partial f}{\partial z} p_i.$$

l'identité (3) devient

$$\frac{\partial f}{\partial z} (p_1 + X_1 p_2 + \dots + X_{n-1} p_n - X) = 0.$$

La dérivée  $\frac{\partial f}{\partial z}$  ne s'annulant pas, par hypothèse, notre assertion devient donc évidente.

Jacobi a démontré (1) que l'équation (3) admet  $n$  in-

---

(1) *Dilucidationes de æquationum differentialium vulgarium systematis earumque connexionione cum æquationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis* (Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 147, n° 5).

*tégrales distinctes, si elle en a une.* Par conséquent, l'équation (3) étant intégrable (1), il existe  $n$  équations

$$(4) \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donnant  $n$  solutions distinctes de l'équation (1), et il en résulte des identités

$$(5) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + X \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$C_i$  étant des constantes arbitraires.

2. Cela posé, supposons l'équation (3) intégrable. Le problème que nous nous proposons de résoudre, c'est de former un système d'équations différentielles ordinaires dont l'intégrale générale soit définie par le système (4).

Il est à remarquer, en premier lieu, que le déterminant fonctionnel

$$(6) \quad D \left( \frac{f_1, f_2, \dots, f_n}{x_2, x_3, \dots, z} \right)$$

ne s'annule pas, les  $f_i$  étant encore distinctes, considérées comme fonctions des  $x_2, x_3, \dots, x_n, z$  seulement. Car s'il existait une relation

$$F(x_1, f_1, f_2, \dots, f_n) = 0,$$

on en tirerait, en vertu des identités (5),

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

et les fonctions  $f_i$  ne seraient plus distinctes, contrairement à notre hypothèse. Il s'ensuit que les équations (4)

(1) Par le mot *intégrable*, nous comprenons que l'équation (3) admet une intégrale.

sont résolubles par rapport aux  $x_2, x_3, \dots, x_n, z$ . Nous sommes donc en état d'imaginer un système

$$(7) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = Z_1, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = Z_2, \quad \dots, \quad \frac{dz}{dx_1} = Z,$$

dont les intégrales sont représentées par les équations (4). Mais les dérivées totales de ces dernières par rapport à  $x_1$  étant vérifiées, en vertu du système (7), on a les identités

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} Z_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} Z_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

donnant les valeurs  $Z_1, Z_2, \dots, Z$  en fonctions des  $f_i$ . Toutefois il est aisé d'obtenir les mêmes valeurs en fonctions des  $X_1, X_2, \dots$  car il suffit de recourir aux identités (5) pour en avoir de nouvelles :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_2} (Z_1 - X_1) + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} (Z_2 - X_2) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial z} (Z - X) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Le déterminant (6) ne s'annulant pas, on a

$$Z_1 = X_1, \quad Z_2 = X_2, \quad \dots \quad Z = X,$$

et le système (7) devient

$$(8) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = X_1, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dz}{dx_1} = X.$$

Inversement, chaque intégrale du dernier système

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C$$

fournit une solution de l'équation (1), car la fonction  $f$  satisfait à la relation (3).

Par conséquent, l'équation (3) est intégrable en même temps que le système (8).

Or, considérons le domaine où  $X_1, X_2, \dots$  sont des fonctions holomorphes de toutes les variables  $x$  et  $z$ . Il est bien connu que, dans ce domaine, les équations (8) admettent  $n$  intégrales distinctes de forme (4), les fonctions  $f_i$  y étant holomorphes.

Donc, pour le même domaine, l'équation (1) admet  $n$  solutions distinctes qui s'obtiennent en intégrant le système (8).

Enfin, l'intégrale générale de l'équation (1) est représentée par la formule

$$(9) \quad \Pi(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0,$$

$\Pi$  étant une fonction arbitraire. Cette dernière intégrale jouit de la propriété bien connue de contenir toutes les solutions de l'équation (1) pour le domaine où ses coefficients restent holomorphes. Si la fonction  $X$  est nulle, l'équation (1) admet une intégrale évidente

$$z = \text{const.}$$

La formule (9) peut être mise alors sous la forme

$$z = \Pi(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}),$$

$f_1, f_1, \dots, f_{n-1}$  présentant  $n - 1$  intégrales de l'équation considérée distinctes de  $z$ . C'est ainsi que l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$f - \Pi(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Nous avons toujours supposé dans les recherches précédentes que les équations (4) contiennent explicitement la variable  $z$ . Les considérations complémentaires sont donc nécessaires dans le cas contraire. Ce fait se présente, par exemple, quand les fonctions  $X_1, X_2, \dots$  ne contiennent plus  $z$ . Or Jacobi a démontré dans son Mé-

moire cité plus haut <sup>(1)</sup> que le problème étudié revient dans ce cas de même à intégrer le système (8).

3. Passons à présent aux équations simultanées

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r p_{m+r} = X_k, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right.$$

les coefficients  $X$  étant des fonctions des variables  $x$  et  $z$ . On n'en étudie ordinairement que les intégrales admettant les dérivées partielles de deux premiers ordres continus. Nous le ferons de même et nous supposons de plus que le système (10) est *jacobien* <sup>(2)</sup>, en y comprenant que ses intégrales ne satisfont qu'aux équations (10). Il est donc nécessaire que les égalités

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X^k(X_h^r) - X^h(X_k^r) = 0, \\ X^k(X_h) - X^h(X_k) = 0, \\ r = 1, 2, \dots, n - m \end{array} \right.$$

soient vérifiées pour toutes les valeurs distinctes des indices  $h, k$  de 1 à  $m$ , en représentant symboliquement par  $X^k$  l'opération

$$\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r \frac{\partial}{\partial x_{m+r}} + X_k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Cela posé, soit la valeur de  $z$ , tirée de l'équation

$$(12) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C,$$

une intégrale du système (10),  $C$  étant une constante ar-

<sup>(1)</sup> *Gesammelte Werke*, Bd IV, p. 176, n° 6.

<sup>(2)</sup> On nomme ordinairement *jacobiens* les systèmes homogènes seulement.

bitraire. On en conclut que les relations

$$(13) \quad X^k(f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

sont identiquement vérifiées.

Inversement, l'égalité (12) fournit une solution du système (10), si la fonction  $f$  satisfait aux équations (13).

En effet, comme la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial z}$  ne s'annule pas, notre assertion est une conséquence immédiate des identités

$$\frac{\partial f}{\partial z} \left( p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r p_{m+r} + X_k \right) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m.$$

4. On démontre aisément que les conditions (11) sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que les équations (10) soient intégrables, car le système (13) possède, étant de même jacobien,  $n - m + 1$  intégrales distinctes et holomorphes dans le domaine où les fonctions  $X$  le sont aussi. Il existe, par conséquent,  $n - m + 1$  équations distinctes

$$(14) \quad \begin{cases} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_i, \\ i = 1, 2, \dots, n - m + 1, \end{cases}$$

$f_i$  étant des fonctions holomorphes, satisfaisant identiquement aux relations

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} + X_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

$C_i$  étant des constantes arbitraires. De plus, on a

$$(16) \quad D \left( \frac{f_1, f_2, \dots, f_{n-m+1}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, z} \right) \geq 0.$$

Les équations (14) sont donc résolubles par rapport

aux variables  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, z$ , et il est aisé d'en tirer ces dernières valeurs en fonctions des variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_m$  et de  $n - m + 1$  constantes arbitraires.

Nous sommes à présent en état d'aborder le problème fondamental de *former un système d'équations aux différentielles totales*

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx_{m+r} = \sum_{k=1}^m Z'_k dx_k, \\ dz = \sum_{k=1}^m Z_k dx_k, \\ r = 1, 2, \dots, n - m, \end{array} \right.$$

dont les intégrales soient les équations (14). Pour obtenir les valeurs des fonctions  $Z$ , nous avons à remarquer que les différentielles totales des équations (14) donnent, en vertu du système (17), les identités

$$\sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} Z'_k + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k \right) dx_k = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n - m + 1,$$

car il est impossible d'éliminer les constantes  $C_i$  entre les équations (14). Or les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  étant indépendantes, on a identiquement

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} Z'_k + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n - m + 1,$$

l'indice  $k$  prenant toutes les valeurs de 1 à  $m$ . En y joi-

gnant les identités (15), il vient .

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} (Z_k^r - X_k^r) + \frac{\partial f_i}{\partial z} (Z_k - X_k) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n - m + 1.$$

L'inégalité (16) ayant lieu, nous avons

$$Z_k^r = X_k^r, \quad Z_k = X_k.$$

Le système (17) devient donc

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx_{m+r} = \sum_{k=1}^m X_k^r dx_k, \\ dz = \sum_{k=1}^m X_k dx_k, \\ r = 1, 2, \dots, n - m. \end{array} \right.$$

Inversement, on tire de chaque intégrale du dernier système une solution du (10)<sup>ième</sup>, les identités (15) étant satisfaites, et les  $n - m + 1$  intégrales distinctes des équations (18) en définissent les solutions requises du système (10).

Enfin la formule

$$\Pi(f_1, f_2, \dots, f_{n-m+1}) = 0,$$

$\Pi$  désignant une fonction arbitraire, représente une intégrale générale du système (10). Cette dernière jouit de la propriété remarquable de contenir toutes les solutions des équations (10) pour le domaine où leurs coefficients sont holomorphes, comme je l'ai démontré dans un cas bien plus général dans mon Travail : *Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (\*).

---

(\*) *Journal de M. JORDAN*, p. 423; 1897.

Si les fonctions  $X_k$  étaient nulles, les équations (10) étant homogènes, l'une de leurs solutions est évidemment

$$z = \text{const.}$$

C'est-à-dire l'intégrale générale correspondante peut être représentée par la formule

$$z = \Pi(f_1, f_3, \dots, f_{n-m}).$$

5. Les considérations citées ne sont permises que si les fonctions  $f_i$  dépendent de  $z$ , selon l'hypothèse introduite. Par suite, il est indispensable d'étudier le cas, où les équations (18) admettent des intégrales indépendantes de  $z$ ,

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_i, \\ i &= 1, 2, \dots, l, \quad l < n - m + 1. \end{aligned}$$

Les dernières équations sont toujours résolubles par rapport à  $l$  variables quelconques parmi  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  que nous nommerons  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+l}$ . En introduisant  $f_1, f_2, \dots, f_l$  comme nouvelles variables indépendantes au lieu de ces dernières, les équations (10) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \sum_{s=l+1}^{n-m} (X_k^s) \frac{\partial z}{\partial x_{m+s}} &= (X_k), \\ k &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

les parenthèses désignant le résultat de la transformation effectuée, et forment un système jacobien. Les équations aux différentielles totales correspondantes sont présentées par les  $n - m - l + 1$  équations que l'on obtient de  $n - m - l + 1$  dernières du système (18), en y éliminant les variables  $x_{m+1}, \dots, x_{m+l}$ . Soit leur intégrale générale donnée par les équations

$$\begin{aligned} f_{l+j}(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+l+1}, \dots, x_n, z, f_1, f_2, \dots, f_l) &= C_{l+j}, \\ j &= 1, 2, \dots, n - m - l + 1. \end{aligned}$$

Il est évident que l'intégrale générale du système examiné aux dérivées partielles est une fonction arbitraire de toutes les  $n - m + 1$  fonctions  $f$ , exprimées en  $x$  et  $z$ . Par conséquent, le problème d'intégration du système (10) revient toujours à intégrer les équations (18).

---