NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur les surfaces du quatrième ordre qui ont deux droites doubles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 400-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__400_1>

[M²4c]

SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE QUI ONT DEUX DROITES DOUBLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. L'étude des quartiques binodales offre un intérêt spécial, en raison de ce fait que, si les deux points nodaux A et B sont les points à l'infini sur les axes cartésiens Ox et Oy, l'équation de la quartique est la relation *doublement quadratique* la plus générale entre deux variables x et y, soit

$$y^2(ax^2+2bx+c)+2y(a'x^2+2b'x+c')$$
$$+(a''x^2+2b''x+c'')=0;$$

nous nous placerons dans ce dernier cas. De chaque point nodal on peut mener quatre tangentes à la courbe;

soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des tangentes parallèles à Oy, et y_1, y_2, y_3, y_4 les ordonnées des tangentes parallèles à Ox : les indices des y étant mis convenablement, on sait que les deux rapports anharmoniques (x_1, x_2, x_3, x_4) et (y_1, y_2, y_3, y_4) sont égaux; on le démontre en rendant la relation symétrique en x et y par une substitution homographique effectuée sur l'une des variables (trois conditions, trois paramètres), ou en supposant que, au moyen de substitutions homographiques effectuées sur chaque variable, zéro et l'infini sont devenus critiques pour x et aussi pour y, ce qui réduit la relation à la forme simple

$$(fxy + gx + hy + k)^2 - 4xy = 0,$$

ou, moins simplement, par un calcul que l'on trouve dans le *Traité des courbes planes* de Salmon.

Il existe généralement soixante-quatre systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique : l'un de ces systèmes est d'ailleurs illusoire, comme étant formé de droites doubles. Des théorèmes généraux donnés par M. Humbert pour les courbes planes (*Journal de Liouville*, 1886) donnent, pour le cas d'une quartique binodale, le résultat suivant :

A. 4×2^2, ou plus exactement $3 \times 2^2 + 1$ systèmes de coniques quadruplement tangentes à la courbe, trois systèmes de l'une des quatre familles étant illusoires;

B. 4×2 systèmes de coniques passant par le point nodal sur Ox et triplement tangentes à la courbe, 4×2 systèmes analogues pour le point nodal sur Oy;

C. 4×1 systèmes de coniques passant par les deux points nodaux et doublement tangentes à la courbe. Chaque système B compte pour deux, chaque système C compte pour quatre, et l'on retrouve les soixante-quatre systèmes. Voici quelques détails sur ces systèmes.

A. Le système particulier de coniques quadruplement tangentes à la quartique est celui qui contient la droite double AB, A et B étant les points doubles de la courbe; on l'obtient en mettant l'équation de la quartique sous la forme

$$(a) \qquad (axy + a'x + by)^2 - \mathrm{U} = 0,$$

U étant le premier membre de l'équation d'une conique, de sorte que la quartique est l'enveloppe des coniques

$$(a') \qquad \lambda^2 \mathrm{U} + 2\lambda(axy + a'x + by) + 1 = 0;$$

les coniques de ce système jouissent d'une propriété remarquable (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXV, p. 265) : la correspondance entre une tangente à la conique et un point de la quartique situé sur cette tangente, correspondance d'espèce (2, 4), se décompose en deux correspondances (1, 2).

Les autres systèmes s'obtiennent en mettant l'équation de la quartique sous la forme

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(fxy + gx + hy + k)^2 \\ &\qquad - (x^2 + 2px + q)(y^2 + 2p'y + q') = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui est possible de douze façons; les racines du trinome en x sont, par exemple, x_1 et x_2, ou x_3 et x_4, au sens déjà mentionné, et celles du trinome en y peuvent être alors y_1 et y_2, ou y_3 et y_4 : on s'en assure aisément en supposant que, par des substitutions homographiques, on réduise le produit des deux trinomes à être $4xy$, comme on l'a dit plus haut; on a donc trois familles de quatre solutions; la quartique est alors l'enveloppe des coniques

$$(\alpha') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^2(x^2 + 2px + q) + 2\lambda(fxy + gx + hy + k) \\ &\qquad\qquad + (y^2 + 2p'y + q' = 0. \end{aligned} \right.$$

B. On peut mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l}(axy+a'x+\lambda y+\mu)^2\\ \qquad -(Ny^2+Px+Qy+R)(x-x_1)=0,\end{array}\right.$$

et les relations qui donnent finalement x_1, λ et μ sont de la forme

$$(\lambda+ax_1)^2=\varphi(x_1),\qquad (\mu+a'x_1)^2=\psi(x_1),$$
$$(\lambda+ax_1)(\mu+a'x_1)=\chi(x_1);$$

lorsqu'on a choisi x_1, qui est l'abscisse d'une tangente parallèle à Oy, on voit que l'on a deux solutions pour λ et μ; on a donc 4×2 solutions; la quartique est alors l'enveloppe des coniques

$$(b')\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda^2(Ny^2+Px+Qy+R)\\ \qquad +2\lambda(axy+a'x+\lambda y+\mu)+(x-x_1)=0,\end{array}\right.$$

et ces coniques passent par le point nodal à l'infini sur Ox. On a de même les systèmes de coniques passant par le point nodal sur Ox.

C. L'équation (α) de la quartique, quand on décompose chaque trinome en deux facteurs, montre qu'elle est encore l'enveloppe des coniques

$$(c')\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda^2(x-x_1)(y-y_1)+2\lambda(fxy+gx+hy+k)\\ \qquad +(x-x_2)(y-y_2)=0,\end{array}\right.$$

lesquelles passent par les deux points nodaux. Ce système de coniques comprend quatre coniques évanouissantes $(x-x_i)(y-y_j)=0$, les valeurs de i et j étant $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$; on sait que les points doubles de ces quatre coniques évanouissantes sont sur une conique passant par les points doubles de la quartique. Le rapport anharmonique $y(1, 2, 3, 4)$ pouvant encore s'écrire $y(2, 1, 4, 3)$, $y(3, 4, 1, 2)$, $y(4, 3, 2, 1)$, il existe quatre systèmes de coniques passant par les points nodaux de la quartique et doublement tangentes à la courbe; pour le second, par exemple, les valeurs de i et j sont (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3).

II.

L'application suivante des considérations qui précèdent a été inspirée par une Note de M. Raoul Bricard, parue au *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXV, p. 180.

2. Soit S une surface du quatrième ordre ayant *deux droites doubles* AB, CD; tout plan m qui passe par CD coupe la surface suivant deux droites qui se coupent en M sur AB, et la surface est une surface réglée (quatrième ordre, quatrième classe); dans la classification des surfaces réglées du quatrième ordre, donnée par Cayley, ces surfaces forment la première espèce : on n'a d'ailleurs pas à supposer que la surface est réglée, si l'on suppose qu'elle a deux droites doubles, cette dernière hypothèse entraînant la première. Pour chacune des génératrices G ou MN, on a relativement à AB un point d'appui M et un plan d'angle n, relativement à CD un point d'appui N et un plan d'angle m; on peut désigner la droite par l'une quelconque des notations (M, N), (m, n), (M, n), (m, N), la notation (M, n) par exemple se rapportant surtout à l'arête AB; nous attacherons aux deux systèmes (M, m) et (N, n) deux paramètres α et β ayant avec eux une correspondance univoque. Les deux paramètres α et β sont liés par une correspondance doublement quadratique; avec un tétraèdre de référence ABCD, dont deux arêtes opposées sont dirigées

suivant les deux droites données, on peut écrire

$$\text{(G)} \qquad x = \alpha y, \qquad z = \beta t;$$

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta^2(a\alpha^2 + 2b\alpha + c) \\ + 2\beta(a'\alpha^2 + 2b'\alpha + c') \\ + \quad (a''\alpha^2 + 2b''\alpha + c'') = 0, \end{array} \right.$$

et l'équation de la surface est

$$\text{(S)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} z^2(ax^2 + 2bxy + cy^2) \\ + 2zt\,(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) \\ + \quad t^2(a''x^2 + 2b''xy + c''y^2) = 0; \end{array} \right.$$

on trouve cette équation au Chapitre XVI du *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* de Salmon. On aurait l'équation tangentielle en regardant la droite MN comme la droite qui joint les deux points $v = -\alpha u$, $r = -\beta w$, ce qui conduit à remplacer dans l'équation ponctuelle x et y par v et $-u$, z et t par r et $-w$.

3. Soient α_1, α_2, α_3, α_4 les valeurs critiques de α, c'est-à-dire les valeurs de cette variable qui donnent pour β deux valeurs égales; il existe de même quatre valeurs critiques de β, et, en mettant convenablement les indices des β critiques, les deux rapports anharmoniques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ sont égaux. Les deux plans tangents n et n' à la surface S en un point M de AB' étant déterminés par les deux génératrices (M, N) et (M, N'), les deux points de contact N et N' d'un plan m passant par CD étant déterminés par les deux génératrices (m, n) et (m, n'), les quatre points critiques M_1, M_2, M_3, M_4 sont des points pincés de la surface, les quatre plans m_1, m_2, m_3, m_4 qui passent par ces points sont des plans pincés; on a de même quatre points pincés N'_i sur CD, quatre plans pincés n'_i passant

par AB, l'accent indiquant que les points M_1 et N'_1 ne correspondent pas à une même génératrice.

4. D'après ce que l'on a vu au § I, la relation (1) peut se mettre de douze façons sous la forme (α) dans laquelle on remplace x et y par α et β; l'équation de la surface S peut donc se mettre de douze manières sous la forme

$$(fxz + gxt + hyz + kyt)^2 \\ -(x^2 + 2pxy + qy^2)(z^2 + 2p'zt + q't^2) = 0;$$

pour chacune de ces douze façons, la surface S *est enveloppe de quadriques ayant pour équation générale*

$$\lambda^2(x^2 + 2pxy + qy^2) \\ + 2\lambda(fxz + gxt + hyz + kyt) + (z^2 + 2p'zt + q't^2) = 0;$$

on aurait l'équation tangentielle des quadriques d'un autre système en remplaçant x et y par v et $-u$, z et t par r et $-w$. Les quadriques d'un système coupent AB et CD en des points fixes, points pincés de la surface, qui seront, par exemple, M_1, M_2, N'_1, N'_2, et sont tangentes à quatre plans pincés qui sont, dans l'hypothèse que l'on vient de faire, m_3, m_4, n'_3, n'_4; cela constitue d'ailleurs sept conditions, et non huit, en raison de l'égalité des rapports anharmoniques (M_1, M_2, M_3, M_4) et (N'_1, N'_2, N'_3, N'_4). Les quatre génératrices M_1N_1, M_2N_2, $N'_1M'_1$, $N'_2M'_2$ de la surface S sont à la quadrique

$$fxz + gxt + hyz + kyt = 0,$$

et l'on a

$$(M_1, M_2, M'_1, M'_2) = (N_1, N_2, N'_1, N'_2).$$

Les quadriques considérées ont d'ailleurs huit points communs; en les rapportant au tétraèdre $M_1M_2N'_1N'_2$, ce qui donne leur équation sous la forme simple

$$\lambda^2 xy + \lambda(fxz + gxt + hyz + kyt) + zt = 0,$$

et en coupant par la droite $y = 0$, $fz + gt = 0$, on voit qu'elles sont tangentes en M_1 à cette droite qui est la génératrice $M_1 N_1$; elles sont de même tangentes en M_2 à la génératrice $M_2 N_2$, en N'_1 à la génératrice $N'_1 M'_1$, ... ; ce fait résulte directement de ce que les quadriques sont tangentes à toutes les droites MN. Corrélativement, ces quadriques sont tangentes au plan m_3 en un point de la droite fixe (m_3, n_3), ...

5. Aux coniques (c') du § I correspondraient des quadriques passant par AB et CD et se raccordant avec la surface S le long de deux génératrices ; on aurait quatre systèmes de telles quadriques. Le rattachement de ces quadriques à celles déjà obtenues est une conséquence du fait suivant : Une surface du quatrième ordre dont l'équation peut prendre la forme

$$S^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta = 0.$$

où α, β, γ, δ sont linéaires en x, y, z, t, est, de trois manières différentes, enveloppe de quadriques.

III.

Ce qui suit est emprunté à la Note de M. Bricard rappelée plus haut, et à une Communication orale par laquelle ce géomètre a complété cette Note (juin 1899).

6. Les quartiques binodales qui ont pour points doubles deux points donnés A et B, et qui passent par sept points donnés, ont un huitième point commun; elles dépendent en effet d'un seul paramètre $(14 - 6 - 7 = 1)$, de sorte que leur équation générale est $S + \lambda S' = 0$. On peut dire :

1° *Une relation doublement quadratique est déterminée par huit solutions;*

2° *Les relations doublement quadratiques, en nombre infini, qui admettent sept solutions données, ont une huitième solution commune.*

7. Si l'on considère les droites G qui rencontrent deux droites données AB, CD, et sont tangentes à une quadrique donnée Q_0, les points d'appui M et N sont liés par une correspondance doublement quadratique. On a d'abord ceci :

1° *Les quadriques Q qui sont tangentes à huit droites rencontrant deux droites données sont aussi tangentes à une infinité d'autres droites rencontrant les deux droites données;*

2° *Les quadriques Q qui sont tangentes à sept droites rencontrant deux droites données sont tangentes à une huitième droite rencontrant les deux droites données.*

Ces théorèmes de M. Bricard sont analogues à des théorèmes bien connus qui ont été donnés par Lamé.

8. L'auteur obtient ainsi, en partant de la quadrique Q_0, les droites obtenues au n° 2 comme génératrices d'une surface du quatrième ordre ayant deux droites doubles, et les quadriques Q tangentes à ces droites; il montre d'ailleurs, au moyen des fonctions elliptiques, que la surface S, lieu des droites G et enveloppe des quadriques Q, est du quatrième ordre. Il ne signale pas l'existence des *douze systèmes de quadriques* Q, mais les considérations par lesquelles il établit le théorème concernant une quadrique, qui termine la Note, donnent immédiatement ces douze systèmes; les points d'appui M, qui sont critiques sur AB, sont d'une

part les deux points d'intersection de AB et de Q_0, d'autre part, les deux points où AB est rencontrée par les plans tangents à Q_0 menés par CD ; on obtient de même les points d'appui critiques sur CD ; dès lors, les quadriques Q d'un système passent par exemple par les points critiques M_1, M_2, N'_1, N'_2, et sont tangentes aux quatre plans critiques m_3, m_4, n'_3, n'_4 ; il y aurait seulement à montrer que le groupement des éléments critiques est réglé par une égalité de rapports anharmoniques, ce qui est d'ailleurs facile. Le fait que les quadriques du système considéré sont tangentes en M_1, M_2, N'_1, N'_2 aux droites M_1N_1, M_2N_2, $N'_1M'_1$, $N'_2M'_2$, et le fait corrélatif, sont ici en évidence.