NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Démonstration géométrique d'une propriété des normales à une conique à centre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 502-506

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__502_1>

[$L^1 5b$]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES NORMALES A UNE CONIQUE A CENTRE;

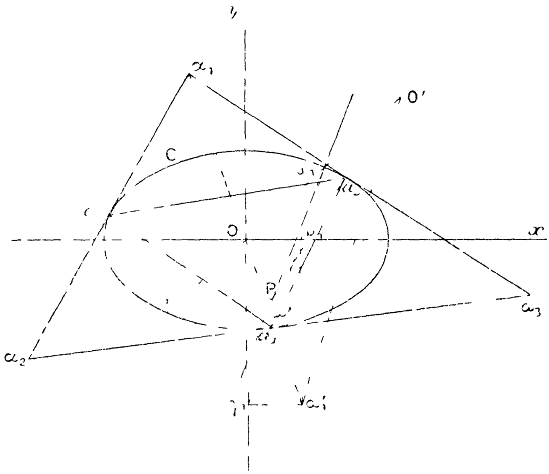
Par M. A. VACQUANT.

I. Théorème. — *Si un point décrit une normale en* ω_1 *à une conique* C, *les pieds des trois autres normales menées de ce point à* C *sont les sommets d'un triangle dont les pôles des côtés, par rapport à* C, *sont sur une hyperbole équilatère* H *passant par le centre de* C, *ayant ses asymptotes parallèles aux axes de* C *et son centre au point* ω *de* C *diamétralement opposé à* ω_1.

Cette propriété est connue; par exemple, elle est indiquée, en partie, sous sa forme corrélative dans l'Ouvrage de M. E. Duporcq (*Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 70); on la rencontre aussi dans un article de Neuberg (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI).

On peut démontrer très simplement cette proposition en se servant de la relation qui existe entre les pôles de deux cordes d'une conique telles que les normales aux extrémités de ces cordes concourent, savoir : *le pôle de l'une des cordes est le centre de l'autre*, en appelant, avec Laguerre, *centre* d'une droite par rapport à des axes de coordonnées rectangulaires le point dont les projections sur les axes sont symétriques, relativement à l'origine. des points où les axes sont rencontrés par la droite ; celle-ci sera la *centrale* du point.

Soient P un point de la normale en ω_1 à la conique C et a_1, a_2, a_3 les pieds des trois autres normales à C menées par P. La corde $\omega_1 a_1$ rencontre les axes Ox, Oy



de C en β_1 et γ_1 ; le point α'_1 qui se projette en β_1 et γ_1 sur Ox et Oy est le symétrique par rapport à O du pôle α_1 de la corde $a_2 a_3$. Dans le rectangle $O\beta_1\alpha'_1\gamma_1$ les diagonales $O\alpha'_1$, $\beta_1\gamma_1$ se coupent en leur milieu α' et sont également inclinées sur Ox et Oy. Soit O' le symétrique de O par rapport à ω_1 ; la droite $O'\alpha'_1$, parallèle à $\omega_1\alpha'$, et la droite $O\alpha'_1$ étant également inclinées sur Ox, Oy, forment deux faisceaux homographiques ; les rayons homologues et parallèles de ces faisceaux sont parallèles à Ox et Oy ; donc le lieu de α'_1 est une hyperbole équilatère passant en O et O', de centre ω_1.

Le lieu de α_1, symétrique de α'_1 par rapport à O, est une hyperbole équilatère H, passant en O, de centre ω diamétralement opposé à ω_1 sur C, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de C.

On remarquera qu'il existe une infinité de triangles tels que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ inscrits à H et circonscrits à C; les normales aux points de contact a_1, a_2, a_3 des côtés d'un triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ avec C concourent en un point situé sur la normale en ω_1 à C.

Réciproquement, si une hyperbole équilatère H *a son centre en un point* ω *d'une conique* C *et ses asymptotes parallèles aux axes de* C, *on peut lui inscrire une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à* C. *Les normales aux points de contact des côtés de l'un de ces triangles concourent en un même point; le lieu de ce point est la normale menée à* C *au point* ω_1 *diamétralement opposé à* ω.

En effet, si l'on considère la normale en ω_1 à C et un point P de cette normale, les tangentes à C aux pieds a_1, a_2, a_3 des trois autres normales menées à C par P se coupent deux à deux en des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ situés sur une hyperbole équilatère H' passant en O, de centre ω, d'asymptotes parallèles à Ox, Oy. Donc H' est identique à H.

II. Théorème. — *Le triangle* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ *inscrit à* H *et circonscrit à* C *est aussi inscrit à une conique* C_1 *coaxiale à* C.

En effet, le triangle $Ox_\infty y_\infty$, ayant pour sommets O et les points à l'infini sur les axes Ox, Oy, et le triangle $a_1a_2a_3$ sont inscrits dans l'hyperbole d'Apollonius $\omega_1 a_1 a_3 a_3$; donc ces triangles sont conjugués par rapport à une conique Γ qui aura dès lors pour axes Ox, Oy. Si l'on prend la polaire réciproque de C par rapport à Γ, on a une conique C' coaxiale à C et inscrite dans $a_1 a_2 a_3$; la polaire réciproque de C' par rapport à C est une conique C_1, coaxiale à C et passant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Les normales en a_1, a_2, a_3 à C concourent en P et les normales en α_1, α_2, α_3 à C_1 concourent en un point P_1 de l'hyperbole équilatère H qui est une hyperbole d'Apollonius pour la conique C_1.

Réciproquement, étant données deux coniques coaxiales C_1 *et* C *telles qu'il existe un triangle* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *inscrit à* C_1 *et circonscrit à* C, *les normales à* C_1 *en* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *concourent; il en est de même des normales à* C *aux points de contact* a_1, a_2, a_3 *de* C *avec les côtés du triangle* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. *Le centre de l'hyperbole d'Apollonius* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *est sur* C.

En effet, il existe une infinité de triangles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ inscrits à C_1 et circonscrits à C; soient T et T' deux de ces triangles, il existe une conique Γ conjuguée à la fois aux triangles T et T'; il est clair que si l'on prend la polaire réciproque de C_1 par rapport à Γ on obtient la conique C; d'ailleurs le triangle $Ox_\infty y_\infty$ conjugué à la fois par rapport aux coniques C et C_1 sera conjugué par rapport à Γ; les triangles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ et $Ox_\infty y_\infty$ conjugués à Γ ont leurs sommets sur une conique qui est une hyperbole d'Apollonius relative à C_1; donc les normales C_1 aux points $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ concourent (E. Duporc, *loc. cit.*, n° 101).

Si C' est la polaire réciproque de C_1 par rapport à C, le triangle $a_1 a_2 a_3$ est inscrit à C et circonscrit à C'. Comme C et C' sont coaxiales, les normales a_1, a_2, a_3 à C concourent, d'après ce qui précède, en un certain point P; de plus, l'hyperbole d'Apollonius $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ a son centre sur C au point ω diamétralement opposé au pied ω_1 de la quatrième normale menée à C par P; car si P décrit la normale en ω_1 à C, les points α_1, α_2, α_3 décrivent une hyperbole équilatère passant en O, x_∞, y_∞, de centre ω, coïncidant avec l'hyperbole d'Apollonius $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ relative à la conique C_1.