NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LEGRAND

Propriété du quadrilatère inscriptible

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 374-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__374_1>

[K8b]

PROPRIÉTÉ DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE;

PAR M. E. LEGRAND.

Dans un polygone inscriptible quelconque il est un point jouissant de diverses propriétés intéressantes : c'est le point de coordonnées

$$(A)\quad \begin{cases} x = R(\cos\alpha + \cos\beta + \ldots + \cos\lambda), \\ y = R(\sin\alpha + \sin\beta + \ldots + \sin\lambda), \end{cases}$$

$2R$ étant le rayon du cercle circonscrit, α, β, ..., λ étant les coordonnées angulaires des sommets A, B, ..., L, par rapport au centre O de ce cercle.

Si l'on examine, en particulier, le cas du quadrilatère ABCL, et que l'on transporte l'origine au point Λ, on reconnaît facilement les résultats suivants :

O cercle circonscrit

$$\begin{aligned}\equiv\ & [x + R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\lambda)]^2 \\ & + [y + R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\lambda)]^2 - 4R^2 = 0,\end{aligned}$$

point H_4 orthocentre de

$$\text{ABC}\ \begin{cases} x = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos\lambda), \\ y = R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin\lambda) \end{cases}$$

(*symétrique de* L);

Ω_4 cercle des neuf points de

$$\text{ABC} \equiv x^2 + y^2 + 2Rx\cos\lambda + 2Ry\sin\lambda = 0$$

(*passe en* Λ);

Ω'_4 cercle des neuf points de

$$\begin{aligned} & H_1H_2H_3 \quad (\text{orthocentres de BCL, CLA, LAB}) \\ & \equiv x^2 + y^2 - 2Rx\cos\lambda - 2Ry\sin\lambda = 0 \end{aligned}$$

(*symétrique de* Ω_4),

point Π_4^1 pied de la normale abaissée de L sur BC

$$\Pi_4^1\ \begin{cases} x = -R[\cos\alpha + \cos(\beta + \gamma - \lambda)], \\ y = -R[\sin\alpha + \sin(\beta + \gamma - \lambda)] \end{cases}$$

$$\left(\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{\alpha + \beta + \gamma - \lambda}{2}\right).$$

Expression symétrique en α, β, γ qui fait apparaître la droite de Simson, donne son équation simple, et montre que *cette* droite de Simson Σ_4 passe au point Λ.

Le quadrilatère des orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 étant symétrique du quadrilatère ABCL, par rapport au point Λ, *ses quatre droites de Simson se confondent respectivement avec celles de ce quadrilatère.*

Le milieu de OΛ *est le milieu des droites joignant* *les milieux des côtés du quadrilatère,* d'où construction simple de A.

En résumé, on reconnaît que, dans le quadrilatère inscriptible, les quatre droites de Simson passent par un même point, centre de symétrie du quadrilatère donné et du quadrilatère des orthocentres, commun aux huit cercles des neuf points de ces deux figures, et relié à la figure par une relation simple.

Si l'on passe à l'hexagone, on voit immédiatement que son point A est le point milieu des dix droites joignant deux à deux les orthocentres des vingt triangles que l'on peut former sur la figure.

Dans tous les cas, le point A est sur la droite joignant le centre du cercle circonscrit au barycentre et à une distance du premier qui est dans un rapport simple avec la distance au second.

La démonstration détaillée de tout ce qui précède se fait par les calculs ordinaires sans difficulté et par de simples transformations d'expressions trigonométriques. L'Auteur se propose de la donner ultérieurement dans les *Nouvelles Annales,* en même temps que de nouveaux développements sur la question.