NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur un système spécial de coordonnées tangentielles et sur la transformation par tangentes orthogonales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 433-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__433_0>

[K6b][P6f]

SUR UN SYSTÈME SPÉCIAL DE COORDONNÉES TANGENTIELLES ET SUR LA TRANSFORMATION PAR TANGENTES ORTHOGONALES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

COORDONNÉES λ, μ.

1. Ayant écrit l'équation cartésienne de la droite en fonction de deux paramètres quelconques, on obtient une équation tangentielle d'une courbe en exprimant, au moyen de ces deux paramètres, la condition de tangence de cette courbe avec la droite. C'est ainsi que la condition de contact de la droite

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{1}$$

avec une courbe quelconque, fournit l'équation plückérienne

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{2}$$

de cette courbe. Si, de même, nous donnons à l'équation de la droite la forme

$$y = \mu(x - \lambda), \tag{3}$$

μ étant le coefficient angulaire, λ l'abscisse à l'origine de cette droite, nous aurons, par la condition de contact avec une courbe donnée, une nouvelle équation tangentielle

$$\psi(\lambda, \mu) = 0. \tag{4}$$

de cette courbe. Le passage du système plückérien à ce second système se fait immédiatement par les formules

$$(5) \qquad u = -\frac{1}{\lambda}, \qquad v = \frac{1}{\lambda\mu},$$

qui montrent que, s'il s'agit de la courbe de la classe m la plus générale, c'est-à-dire si $\varphi(u, v)$ est un polynome du degré m en u et v, l'équation (4) prend la forme

$$(6) \qquad f_m(\lambda)\mu^m + f_{m-1}(\lambda)\mu^{m-1} + \ldots + f_1(\lambda)\mu + f_0 = 0,$$

f_k représentant, d'une manière générale, un polynome en λ d'un degré *au plus égal à k*. Ceci montre que, si l'on se donne une équation algébrique quelconque en λ et μ, il faut, pour déterminer la classe de la courbe correspondante, après avoir ordonné l'équation par rapport à μ, la multiplier par une puissance de μ telle que chaque terme en μ soit d'un degré au moins égal à celui du polynome en λ qui le multiplie, l'exposant de la plus haute puissance de μ faisant alors connaître la classe de la courbe considérée.

Il est d'ailleurs bien évident que si, dans l'équation d'une courbe, μ^p se met en facteur, c'est que la courbe est p fois tangente à l'axe Ox, et que, si l'équation d'une courbe de la classe m n'est que du degré $m - p$ en λ, c'est que la courbe est p fois tangente à la droite de l'infini.

L'équation du premier degré en μ définira le point. Cette équation n'est d'ailleurs autre que (3) que l'on peut écrire

$$(3') \qquad \mu(\lambda - x) + y = 0.$$

L'équation en λ et μ de certaines courbes s'obtient immédiatement. Soit, par exemple, un cercle de centre (α, β) et de rayon r. Si l'équation (3) représente une de ses tangentes, la distance de cette droite au point (α, β) étant égale à r, on a

$$r^2 = \frac{[\beta - \mu(\alpha - \lambda)]^2}{1 + \mu^2}$$

ou

$$(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - r^2)\mu^2 + 2\beta(\lambda - \alpha)\mu + \beta^2 - r^2 = 0. \tag{7}$$

Quant à l'équation générale des coniques, courbes de la seconde classe, elle s'écrira

$$(a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\mu^2 + (b_1\lambda + b_2)\mu + c_2 = 0. \tag{8}$$

Si on l'identifie à la précédente et qu'entre les relations obtenues on élimine α, β et r, ce qui n'offre aucune difficulté, on trouve les conditions pour que cette équation représente un cercle, savoir :

$$a_1 b_1 = 2a_0 b_2, \qquad a_1^2 - b_1^2 = 4a_0(a_2 - c_2). \tag{9}$$

2. L'équation $(3')$, jointe à l'équation en λ et μ d'une courbe quelconque, fait connaître les λ et μ des tangentes menées à cette courbe par le point (x, y).

De là résulte une méthode commode pour déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener à une courbe des tangentes entre lesquelles existe certaine relation angulaire. Il suffit, dans l'équation (4) de la courbe, de remplacer λ par $\frac{\mu x - y}{\mu}$ et d'exprimer qu'entre les racines de l'équation en μ obtenue existe la relation demandée.

Soit, par exemple, à trouver le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique. Le résultat de la substitution précédente effectuée dans (8) est

$$\left\{\begin{aligned} &(a_0x^2 + a_1x + a_2)\mu^2 \\ &\quad - (2a_0xy - b_1x + a_1y - b_2)\mu \\ &\qquad\qquad + a_0y^2 - b_1y + c_2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Si l'on exprime que le produit des racines μ de cette équation est égal à -1, on a l'équation du cercle

$$a_0(x^2+y^2)+a_1x-b_1y+a_2+c_2=0.$$

Soit, d'une manière générale,

$$U_m\mu^m+U_{m-1}\mu^{m-1}+\ldots+U_1\mu+U_0=0, \tag{11}$$

le résultat de la substitution indiquée dans (6), U_k représentant un polynome au plus de degré k en x et y.

Si l'on appelle τ la tangente de la somme des angles que les m tangentes déterminées par cette équation font avec Ox, on a

$$\tau=\frac{-U_{m-1}+U_{m-3}-U_{m-5}-\ldots}{U_m-U_{m-2}+U_{m-4}-\ldots}. \tag{12}$$

Donc cette équation (12) fait connaître le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe (6) un système de tangentes d'orientation fixe, suivant la terminologie de Laguerre [1].

Les foyers étant les points d'où l'on peut mener à la courbe des tangentes isotropes, on voit que leurs coordonnées satisfont à l'équation (11) où l'on fait $\mu=i$. Ces foyers se trouvent donc à la rencontre des courbes

$$\left\{\begin{array}{l} U_m\quad-U_{m-2}+U_{m-4}-\ldots=0,\\ U_{m-1}-U_{m-3}+U_{m-5}-\ldots=0,\end{array}\right. \tag{13}$$

ce qui montre que les courbes du faisceau (12) passent toutes par les n^2 foyers de la courbe considérée.

Dans le cas d'une conique, l'équation (11) prend la forme (10) et les équations (13) deviennent

$$\left\{\begin{array}{ll} a_0(x^2-y^2)+a_1x+b_1y+a_2-c_2&=0,\\ 2a_0xy-b_1x+a_1y-b_2&=0.\end{array}\right. \tag{14}$$

---

[1] Sur cette importante notion, *voir* dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. XII, p. 37 et 129; 1893) un intéressant Mémoire de M. G. Humbert.

Si l'on prend comme orientation constante celle de Ox, auquel cas $\tau = 0$, c'est cette dernière équation qui fait connaître le lieu demandé. Elle définit une hyperbole équilatère concentrique à la conique considérée, puisqu'elle passe par ses quatre foyers. On le vérifiera d'ailleurs plus loin. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Si l'hyperbole équilatère H *est concentrique à la conique* C *et passe par ses foyers, les tangentes que de tout point de* H *on peut mener à* C *sont également inclinées sur les asymptotes de* H.

3. Pour avoir le point de contact de la tangente (λ, μ) avec la courbe, il suffit d'écrire que ce point se trouve à la fois sur cette droite et sur celle qui a pour coordonnées $\lambda + d\lambda$ et $\mu + d\mu$, ce qui donne immédiatement

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda + \mu \frac{d\lambda}{d\mu}, \\ y &= \mu^2 \frac{d\lambda}{d\mu}, \end{aligned} \right.$$

$d\lambda$ et $d\mu$ étant liés, si l'équation (4) est celle de la courbe, par

$$\psi'_\lambda \, d\lambda + \psi'_\mu \, d\mu = 0.$$

Ceci montre que l'équation

$$\psi'_\lambda = 0,$$

jointe à celle de la courbe, fait connaître les asymptotes et

$$\psi'_\mu = 0$$

les points de rencontre de la courbe avec Ox.

Reprenons l'équation (6) de la courbe la plus générale de la classe m, et ordonnons-la par rapport à λ :

$$a_0 \mu^m \lambda^m + (a_1 \mu^m + b_1 \mu^{m-1}) \lambda^{m-1} + \ldots = 0.$$

Si nous considérons les λ des m tangentes parallèles à une direction définie par une valeur particulière de μ, nous avons

$$\sum \lambda = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{a_0 \mu},$$

et, par suite,

$$\sum \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{b_1}{a_0 \mu^2}.$$

Donc, en vertu des formules (15), il vient, pour les m points de contact de ces tangentes parallèles,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum x &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ \sum y &= \frac{b_1}{a_0}, \end{aligned} \right.$$

équations qui expriment que le *barycentre de ces m points de contact est fixe* (théorème de Chasles).

Si l'on appelle θ l'angle que la droite (λ, μ) fait avec Ox [1], de telle sorte que

$$\mu = \operatorname{tang} \theta,$$

on a, en appelant r le rayon de courbure au point (x, y),

$$r = \frac{ds}{d\theta} = \frac{dx}{\cos\theta \, d\theta}.$$

Or, la différentiation de l'équation précédente donne

$$d\mu = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

---

[1] Le système des coordonnées λ et θ est celui qui a reçu le nom de *coordonnées axiales* (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. III, p. 545; 1884).

Par suite

$$r = \frac{dx}{\cos^3\theta\, d\mu}$$

ou

(17) $$r = \frac{dx}{d\mu}(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}},$$

formule qu'on peut transformer, au moyen de la première formule (15), en

(17') $$r = \left(2\frac{d\lambda}{d\mu} + \mu\frac{d^2\lambda}{d\mu^2}\right)(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}}.$$

La formule (17) montre d'ailleurs immédiatement, en vertu de (16), qu'entre les rayons de courbure correspondant aux points de contact des m tangentes parallèles envisagées ci-dessus, on a la relation

$$\sum r = 0,$$

d'où résulte que *le barycentre des centres de courbure correspondant aux points de contact des m tangentes parallèles se confond avec celui de ces points de contact* (théorème de Duhamel).

Remarquons enfin que les formules (15) conduisent à une facile détermination de la développée d'une courbe donnée par son équation (4) en λ et μ. Si, en effet, on appelle λ' et μ' les coordonnées de la normale au point (x, y), on a évidemment

(18) $$\mu\mu' + 1 = 0,$$

et

$$y^2 + (x-\lambda)(x-\lambda') = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (15),

(19) $$\mu(\mu^2+1)\frac{d\lambda}{d\mu} + \lambda - \lambda' = 0.$$

L'élimination de λ et μ entre les équations (4), (18) et (19) donne l'équation de la développée. On en trouvera plus loin un exemple.

4. Nous avons vu que l'équation générale des coniques en coordonnées λ et μ est l'équation (8) ci-dessus, et que les foyers de cette conique sont donnés par les équations (14).

Remarquons tout d'abord que si $a_0 = 0$ l'équation (8) ne détermine qu'une tangente à distance finie pour toute valeur de μ, c'est-à-dire que la conique est une parabole. D'ailleurs, en ce cas, les équations (14) ne donnent qu'un foyer.

Supposons maintenant la conique douée de centre. Le coefficient a_0, différent de zéro, peut toujours être supposé *positif*. En nous plaçant dans cette hypothèse, cherchons à déterminer la nature de la conique d'après son équation (8). Pour cela, il suffit de discuter la réalité des valeurs de λ correspondant aux diverses valeurs de μ. Cette réalité dépend du signe de

$$T = (a_1^2 - 4a_0a_2)\mu^2 + 2(a_1b_1 - 2a_0b_2)\mu + (b_1^2 - 4a_0c_2),$$

qui lui-même est lié à la réalité de ses racines en μ. Or, si l'on représente par

$$\Delta = a_0b_2^2 - a_1b_1b_2 + a_2b_1^2 + b_1^2c_2 - 4a_0a_2c_2$$

le discriminant de la forme obtenue en rendant homogène le premier membre de l'équation (8) où μ et $\lambda\mu$ seraient les variables, on trouve immédiatement

$$(a_1b_1 - 2a_0b_2)^2 - (a_1^2 - 4a_0a_2)(b_1^2 - 4a_0c_2) = 4a_0\Delta.$$

Donc, puisque a_0 est supposé positif, suivant que Δ est supérieur, égal ou inférieur à zéro, le trinome en T a ses racines réelles et distinctes, égales ou imaginaires.

Dans le premier cas, lorsque μ est compris entre les racines μ_1 et μ_2 de $T = 0$, les valeurs de λ correspondantes sont imaginaires. La conique est alors une hyperbole dont μ_1 et μ_2 font connaître les directions asymptotiques. Si au contraire $\Delta = 0$, les racines de $T = 0$ sont imaginaires; ce trinome est constamment positif ou négatif suivant le signe de $a_1^2 - 4a_0a_2$; on a une ellipse réelle ou imaginaire. Si $\Delta = 0$, le polynome du second degré en λ et $\lambda\mu$ se décompose; on a un système de deux points. Cette discussion peut se résumer ainsi :

$$
\begin{array}{lll}
a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{parabole} & \\
a_0 > 0 \left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \ldots\ldots \\ \Delta = 0 \ldots\ldots \\ \Delta < 0 \ldots\ldots \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{hyperbole} \\ \text{deux points} \\ \text{ellipse} \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \ldots \\ a_1^2 - 4a_0a_2 < 0 \ldots \end{array} \right. \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{réelle} \\ \text{imaginaire} \end{array}
\end{array}
$$

La conique est un cercle si les directions asymptotiques sont isotropes, c'est-à-dire si l'équation $T = 0$ se réduit à $\mu^2 + 1 = 0$, ce qui redonne les conditions (9) déjà obtenues directement.

On aura une hyperbole équilatère si le produit des racines de $T = 0$ est égal à -1, c'est-à-dire si

$$a_1^2 + b_1^2 = 4a_0(a_2 + c_2).$$

Le centre, qui se confond pour les coniques avec le point de Chasles, a pour coordonnées, d'après (16),

$$x = -\frac{a_1}{2a_0}, \qquad y = \frac{b_1}{2a_0}, \tag{20}$$

et ce point coïncide bien, comme on l'a annoncé à la fin du n° 2, avec le centre de l'hyperbole équilatère définie par l'une ou l'autre des équations (14).

Dans le cas de la parabole, le centre est rejeté à l'infini dans la direction dont le coefficient angulaire, en vertu des formules (20), est

$$\mu = -\frac{b_1}{a_1}. \tag{21}$$

Il est facile de former les équations des coniques placées dans des situations spéciales par rapport à Ox et Oy.

Si ces axes se confondent avec ceux de la conique on a, en appelant a et b les longueurs des demi-axes suivant Ox et Oy,

$$(\lambda^2 - a^2)\mu^2 - b^2 = 0. \tag{22}$$

Une parabole ayant son axe perpendiculaire à Ox aura, d'après (21), une équation de la forme

$$a_2\mu^2 + (b_1\lambda + b_2)\mu + c_2 = 0. \tag{23}$$

Si une parabole a son axe dirigé suivant Ox, son équation prend la forme

$$(a_1\lambda + a_2)\mu^2 + c_2 = 0, \tag{24}$$

et si le foyer est, en outre, en O, elle devient

$$(2\lambda + p)\mu^2 + p = 0, \tag{25}$$

p étant le paramètre de la parabole.

Comme exemple de recherche de développée, nous allons prendre cette dernière équation réduite de la parabole.

La différentiation de cette équation donne

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = -(2\lambda + p).$$

Donc, l'équation (19) devient ici

$$-(2\lambda + p)(\mu^2 + 1) + \lambda - \lambda' = 0,$$

ou, en tenant compte de l'équation (25),

$$\lambda + \lambda' = 0.$$

Tirant λ' de cette équation, μ' de (18) et portant dans (25), on a, en supprimant les accents de λ' et μ' après la substitution faite

$$p\mu^2 - 2\lambda + p = 0, \tag{26}$$

équation de la parabole semi-cubique qui constitue la développée cherchée et qui a un point de rebroussement sur Ox au point $\lambda = \frac{p}{2}$ (centre de courbure au sommet de la parabole).

Transformation par tangentes orthogonales.

5. Le système des coordonnées λ, μ se prête particulièrement bien à l'étude de la transformation par tangentes orthogonales, ainsi définie ([1]) :

La transformée d'une courbe est l'enveloppe des perpendiculaires aux tangentes à cette courbe, menées par les points où ces tangentes rencontrent un axe fixe.

Prenant cet axe comme axe Ox, on voit qu'il suffit, pour avoir la transformée d'une courbe donnée par son équation en coordonnées λ et μ, de changer dans cette équation μ en $-\frac{1}{\mu}$.

Le fait que $i = -\frac{1}{i}$ montre immédiatement que *la transformation conserve les foyers.*

De même, les points où une courbe rencontre Ox sous un angle non nul étant donnés par la condition que l'équation ait une racine double en μ, on voit que *la transformation conserve les points de rencontre sous un angle non nul avec Ox.*

([1]) *Voir* notre brochure *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 89.

Si x et x' sont les abscisses des points de contact M et M′ des tangentes correspondantes TM et TM′, on a, d'après la première formule (15),

$$x + x' = 2\lambda + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} + \mu' \frac{d\lambda}{d\mu'}.$$

Mais, de la relation

$$\mu\mu' = -1,$$

on tire

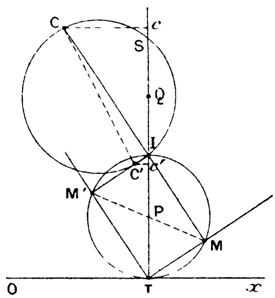
$$\frac{\mu}{d\mu} + \frac{\mu'}{d\mu'} = 0.$$

Donc

$$x + x' = 2\lambda,$$

ce qui prouve que *le milieu de* MM′ *se trouve sur la perpendiculaire élevée en* T *à* Ox (*fig.* 1), ou, ce qui

Fig. 1.



revient au même, que *les normales en* M *et en* M′ *se coupent en un point* I *de cette perpendiculaire.*

Ce point I n'est d'ailleurs autre que le centre instantané de l'angle droit MTM′.

Si le point M est à l'infini il en est de même du point M′. Donc, *aux asymptotes qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à* Ox *correspondent des asymptotes pour la transformée.*

Différentiant la dernière équation écrite on a

$$\frac{dx}{d\theta} + \frac{dx'}{d\theta'} = 2\frac{d\lambda}{d\theta}$$

ou

$$r\cos\theta + r'\cos\theta' = 2\,\mathrm{TI},$$

ce qui montre que *si les points c et c' sont les projections sur* TI *des centres de courbure* C *et* C′, *le milieu* Q *de cc' est le symétrique par rapport à* I *du milieu* P *de* TI.

On voit encore ici que si le point c est rejeté à l'infini il en est de même de c'. Donc, *à une tangente d'inflexion non parallèle ni perpendiculaire à Ox correspond une tangente d'inflexion pour la transformée.*

La dernière propriété obtenue conduit immédiatement à la suivante : *le cercle circonscrit au triangle* CIC′ *coupe* TI *au point* S *symétrique de* T *par rapport à* I.

On peut donc dire que *le point* M′ *est diamétralement opposé à* M *dans le cercle circonscrit à* MTI, *et le centre de courbure* C′ *diamétralement opposé au centre de courbure* C *dans le cercle circonscrit à* CIS [1].

6. La conique générale représentée par l'équation (8) aura pour transformée la courbe de quatrième classe

$$c_2\mu^2 - (b_1\lambda + b_2)\mu + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

qui est bitangente à la fois à l'axe Ox et à la droite de l'infini. Elle n'est que de la troisième classe lorsque

---

[1] M. E. Cesàro a remarqué (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IV, p. 260; 1885), à la suite de la publication de la brochure où nous avions donné ces théorèmes pour la première fois, que si la transformée est définie non plus par un angle droit, mais par un angle constant quelconque entre les tangentes correspondantes, le point M′ et le centre de courbure C′ restent situés respectivement sur les cercles MTI et CIS.

$a_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque la conique donnée est une parabole, et se réduit à une conique lorsqu'on a soit

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0,$$

soit

$$a_0 = 0, \qquad c_2 = 0.$$

Dans le premier cas [équation (23)], on a une parabole dont l'axe est perpendiculaire à Ox; dans le second une parabole tangente à Ox.

Dans les deux cas, d'après la propriété générale de la transformation remarquée ci-dessus, les deux paraboles transformées l'une de l'autre ont même foyer. En outre, dans le premier cas, puisque ces paraboles coupent Ox sous un angle non nul, elles le coupent aux mêmes points. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents respectivement à deux paraboles de même axe et de même foyer est la corde commune à ces paraboles (¹).

Dans le second cas, puisque le pied H de la perpendiculaire abaissée du foyer commun F sur la tangente commune Ox appartient à chaque tangente au sommet, ces deux tangentes au sommet se correspondent dans la transformation et sont, par suite, orthogonales. De là ce théorème :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents respectivement à deux paraboles de même foyer et d'axes rectangulaires est la tangente commune à ces paraboles.

Une propriété classique de la parabole montre d'ail-

(¹) Nous avons donné une démonstration purement géométrique de ce théorème dans les *Nouvelles Annales* (2ᵉ série, t. XIX, p. 265).

leurs que le point de contact de chacune des paraboles avec Ox est symétrique du point où Ox rencontre l'axe de la parabole par rapport à la projection H du foyer commun sur Ox.

On aperçoit une généralisation immédiate du dernier théorème : soit une courbe de classe m, tangente une fois à Ox et $m-1$ fois à la droite de l'infini. Son équation s'écrit

$$\begin{aligned}(a_{m-1}\lambda + a_m)\mu^{m-1} + (b_{m-1}\lambda + b_m)\mu^{m-2} + \ldots \\ + (h_{m-1}\lambda + h_m)\mu + (k_{m-1}\lambda + k_m) = 0,\end{aligned}$$

et l'on voit que sa transformée est de même espèce.

Donc : *La transformée par rapport à une de ses tangentes t d'une courbe de classe m, tangente m — 1 fois à la droite de l'infini, est une courbe de même espèce tangente à t, coupant cette droite aux mêmes points que la première et possédant les mêmes foyers.*

Si m est impair, les $m-1$ points de contact avec la droite de l'infini peuvent coïncider par moitié avec chacun des points cycliques qui comptent alors comme des foyers. En particulier, si la courbe est de troisième classe, et est bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques, c'est, comme on sait, une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et le cas particulier qu'on obtient ainsi a déjà été remarqué par Laguerre (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII; p. 112). Il s'énonce de la manière suivante :

La transformée par tangentes orthogonales d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement par rapport à une de ses tangentes t est une autre hypocycloïde à trois points de rebroussement également tangente à t et coupant en outre cette droite aux deux mêmes points que la première.

7. Considérons maintenant la développée de la parabole d'axe Ox ayant son foyer en O. Cette parabole est définie par l'équation (25) et sa développée par l'équation (26). Or, la transformée de celle-ci est

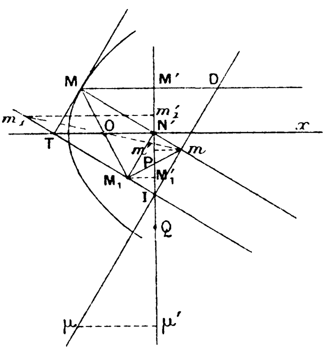
$$(-2\lambda + p)\mu^2 + p = 0,$$

qui ne diffère de (25) que par le changement de λ en $-\lambda$. Elle définit donc la symétrique de la parabole donnée par rapport au point O, c'est-à-dire par rapport à son foyer. Donc :

La transformée de la développée d'une parabole par rapport à son axe est la symétrique de cette parabole par rapport à son foyer (1).

Si M_1 est le point où la perpendiculaire en N à la normale MN touche son enveloppe (*fig.* 2), ce point est le

Fig. 2.



symétrique de M par rapport au foyer O. Si donc la per-

(1) Pour démontrer ce théorème par la Géométrie élémentaire, il suffit de remarquer que la tangente et la normale en un point d'une parabole coupent l'axe de cette courbe en des points symétriques par rapport au foyer.

pendiculaire élevée en ce point à NM_1 coupe en I la perpendiculaire élevée en N à Ox, le centre de courbure répondant à M est le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur MN.

Or, le triangle OM_1N étant isoscèle, on voit que les angles mM_1O et INO sont égaux, c'est-à-dire que M_1m est perpendiculaire à MM_1, d'où ce théorème classique :

La projection du rayon de courbure en un point d'une parabole sur le rayon vecteur de ce point issu du foyer est double de ce rayon vecteur.

Le centre de courbure m_1 répondant au point M_1 pour la parabole enveloppée par NM_1 est le symétrique m_1 de m par rapport à O, qui se projette sur NI au point m'_1 symétrique par rapport à N de la projection m' de m sur la même droite.

D'après le théorème démontré au n° 5 sur la correspondance entre les centres de courbure, si le centre de courbure μ de la développée de la première parabole au point m se projette sur TN en μ', les points m'_1 et μ' sont symétriques par rapport au point Q lui-même symétrique du milieu P de TI par rapport à I. On déduit immédiatement de là que

$$\begin{aligned} m'\mu' &= m'_1\mu' - m'_1 m' \\ &= 2(m'_1 Q - m'_1 N) \\ &= 2NQ = 3NI = 3(NM'_1 + M'_1 I) = 3(M'N + Nm') = 3M'm', \end{aligned}$$

et, par suite, que

$$m\mu = 3Dm,$$

en appelant D le point où la normale à la développée rencontre le diamètre MD de la parabole. On retrouve ainsi, d'une façon fort simple, le théorème suivant dû à Maclaurin :

Le rayon de courbure en un point de la développée d'une parabole est triple du segment de la normale à cette développée compris entre son pied et le diamètre correspondant de la parabole.