NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-N. BARISIEN

Généralisation du problème de Malfatti

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 411-422
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__411_0>

[K12bβ]

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE MALFATTI;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

La solution du célèbre problème de Malfatti :

Étant donné un triangle ABC, *décrire trois cercles,* O, O′, O″, *inscrits respectivement dans les angles* A, B, C, *et tels que chacun d'eux touche les deux autres,*

qui est donnée géométriquement (*Géométrie* de ROUCHÉ et COMBEROUSSE, 7ᵉ édition, Iᵉʳ Volume, p. 311 à 314) (¹), et par la Trigonométrie (*Questions de Trigonométrie* de DESBOVES, 3ᵉ édition, 1884, p. 204 à 210), est incomplète, car on ne mentionne dans ces articles qu'une seule solution d'un problème qui en comporte *vingt*, comme nous allons le montrer en traitant la question par le calcul.

Soient

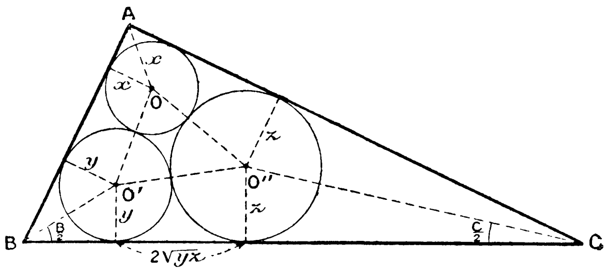
a, b, c les côtés du triangle ABC;
A, B, C, les angles du triangle ABC;
r, r_a, r_b, r_c les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits dans le triangle ABC;
x, y, z les rayons des cercles O, O′, O″.

Première solution. — Le problème, tel qu'il est traité par les auteurs précités, suppose que *les trois*

(¹) *Voir* aussi *Questions de Géométrie* de DESBOVES, 3ᵉ édition, 1880, p. 372 à 375.

cercles O, O′, O″ *sont à l'intérieur du triangle* ABC (*fig.* 1).

Fig. 1.



Dans ce cas, les équations du problème sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= 2\sqrt{yz} + y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2},\\ b &= 2\sqrt{zx} + z\cot\frac{C}{2} + x\cot\frac{A}{2},\\ c &= 2\sqrt{xy} + x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2}.\end{aligned}\right.$$

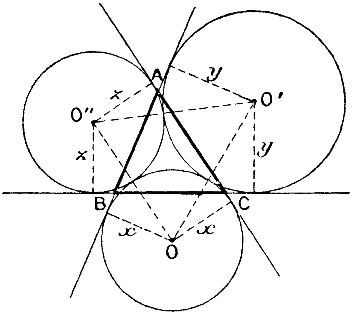
On trouve (Desboves, *loc. cit.*) que les rayons x, y, z qui satisfont à ces équations ont pour valeur

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)}{2\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)},\\ z &= \frac{r\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)}{2\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Examinons maintenant les autres solutions.

Deuxième solution. — Comme dans le cas précédent, *les trois centres* O, O′, O″ (*fig.* 2) *sont situés sur les bissectrices intérieures des angles du triangle* ABC,

Fig. 2.



mais les cercles O, O′, O″ *coupent respectivement les côtés* BC, CA, AB.

Les équations en x, y, z sont alors

$$\text{(II)}\quad \left\{ \begin{aligned} a &= y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{yz},\\ b &= z\cot\frac{C}{2} + x\cot\frac{A}{2} - 2\sqrt{zx},\\ c &= x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}, \end{aligned} \right.$$

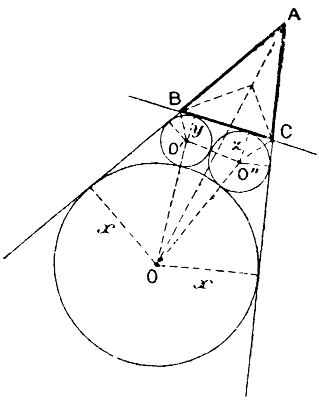
et l'on a, en employant la méthode de Desboves (*loc. cit.*),

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r\left(1+\cot\frac{B}{4}\right)\left(1+\cot\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r\left(1+\cot\frac{C}{4}\right)\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{B}{4}\right)},\\ z &= \frac{r\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)\left(1+\cot\frac{B}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{C}{4}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Il est à remarquer que les systèmes (1) et (2) ne diffèrent que par le signe des radicaux $\sqrt{yz}$, $\sqrt{zx}$, $\sqrt{xy}$. Par conséquent, ces deux systèmes n'en forment qu'un et ont pour solutions les valeurs (1) et les valeurs (2).

Troisième, quatrième et cinquième solutions. — Considérons le cas *où deux des cercles* O′ *et* O″ (*fig.* 3)

Fig. 3.



ont leurs centres sur les bissectrices extérieures des angles B *et* C, *alors que le centre du troisième cercle* O *est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle* A. *Les trois cercles sont du côté de* BC, *opposé à* A.

Les équations en x, y, z sont

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{aligned} a &= y \operatorname{tang}\frac{B}{2} + z \operatorname{tang}\frac{C}{2} + 2\sqrt{yz},\\ b &= x \cot\frac{A}{2} - z \operatorname{tang}\frac{C}{2} - 2\sqrt{xz},\\ c &= x \cot\frac{A}{2} - y \operatorname{tang}\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}.\end{aligned}\right.$$

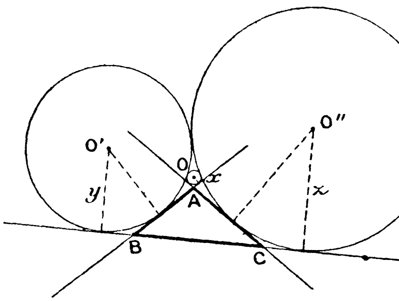
La méthode de Desboves (*loc. cit.*) conduit aux valeurs de x, y, z

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1-\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r_a\left(1-\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]},\\ z &= \frac{r_a\left(1-\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}.\end{aligned}\right.$$

On a deux autres systèmes analogues au système (3) en permutant circulairement les lettres A, B, C.

Sixième, septième et huitième solutions. — Comme dans le cas précédent, *les cercles* O′ *et* O″ (*fig.* 4)

Fig. 4.



ont leurs centres sur les bissectrices extérieures des angles B *et* C, *et le centre* O *est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle* A. *Mais ces trois cercles sont situés du même côté de* BC *que le sommet* A.

Les équations du problème sont alors

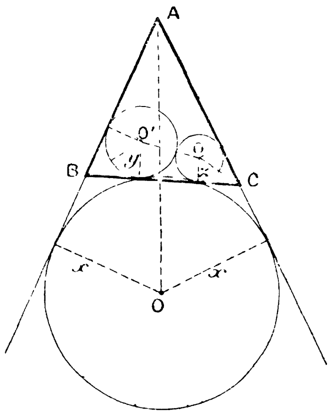
$$(\mathrm{IV})\qquad \left\{\begin{aligned} a &= 2\sqrt{yz} - y \operatorname{tang}\frac{B}{2} - z \operatorname{tang}\frac{C}{2},\\ b &= 2\sqrt{xz} + z \operatorname{tang}\frac{C}{2} - x \cot\frac{A}{2},\\ c &= 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tang}\frac{B}{2} - x \cot\frac{A}{2},\end{aligned}\right.$$

et l'on a, pour x, y, z,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1-\cot\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r_a\left(1-\cot\frac{A}{4}\right)\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]},\\ z &= \frac{r_a\left(1-\cot\frac{A}{4}\right)\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}.\end{aligned}\right.$$

Neuvième, dixième et onzième solutions. — *Les trois*

Fig. 5.



centres O, O′, O″ (*fig.* 5) *sont situés sur les bissectrices* *intérieures des angles* A, B, C, *les cercles* O' *et* O'' *étant situés à l'intérieur du triangle* ABC.

Les équations en x, y, z sont

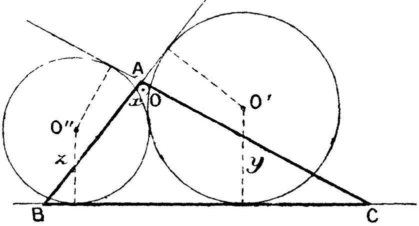
$$(\mathrm{V})\qquad \left\{\begin{aligned} a &= y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2} + 2\sqrt{yz},\\ b &= x\cot\frac{A}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{xz},\\ c &= x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}.\end{aligned}\right.$$

Et l'on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left(1-\cot\frac{B}{4}\right)\left(1-\cot\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r\left(1+\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left(1-\cot\frac{C}{4}\right)}{2\left(1-\cot\frac{B}{4}\right)},\\ z &= \frac{r\left(1+\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left(1-\cot\frac{B}{4}\right)}{2\left(1-\cot\frac{C}{4}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Douzième, treizième et quatorzième solutions. — Comme dans le cas précédent, *les centres* O, O', O'' (*fig.* 6) *sont situés sur les bissectrices intérieures des*

Fig. 6.



angles A, B, C, *mais le cercle* O *est à l'intérieur du triangle* ABC.

Les équations en x, y, z sont

$$
\text{(VI)}\quad \left\{
\begin{aligned}
a &= y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{yz},\\
b &= x\cot\frac{A}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{xz},\\
c &= x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}.
\end{aligned}
\right.
$$

Elles sont satisfaites par

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{r\left(1-\tang\frac{B}{4}\right)\left(1-\tang\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)},\\
y &= \frac{r\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)\left(1-\tang\frac{C}{4}\right)}{2\left(1-\tang\frac{B}{4}\right)},\\
z &= \frac{r\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)\left(1-\tang\frac{B}{4}\right)}{2\left(1-\tang\frac{C}{4}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Quinzième, seizième et dix-septième solutions. — Les deux cas qui vont suivre sont dans le genre de la troisième et de la sixième solution, *le centre de* O *étant situé sur la bissectrice intérieure de l'angle* A, *et les centres* O′ *et* O″ (*fig.* 7) *sur les bissectrices extérieures des angles* B *et* C.

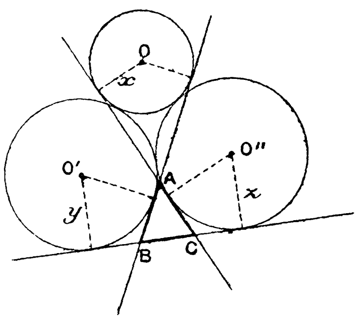
On a, dans ce cas, les équations

$$
\text{(VII)}\quad \left\{
\begin{aligned}
a &= 2\sqrt{yz} - y\tang\frac{B}{2} - z\tang\frac{C}{2},\\
b &= 2\sqrt{xz} - x\cot\frac{A}{2} + z\tang\frac{C}{2},\\
c &= 2\sqrt{xy} + y\tang\frac{B}{2} - x\cot\frac{A}{2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Elles sont satisfaites par

$$(7)\quad \begin{cases} x = r_a \dfrac{\left[1+\cot\left(45^\circ-\dfrac{B}{4}\right)\right]\left[1+\cot\left(45^\circ-\dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1-\cot\dfrac{A}{4}\right)}, \\[2ex] y = r_a \dfrac{\left(1-\cot\dfrac{A}{4}\right)\left[1+\cot\left(45^\circ-\dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1+\cot\left(45^\circ-\dfrac{B}{4}\right)\right]}, \\[2ex] z = r_a \dfrac{\left(1-\cot\dfrac{A}{4}\right)\left[1+\cot\left(45^\circ-\dfrac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1+\cot\left(45^\circ-\dfrac{C}{4}\right)\right]}. \end{cases}$$

Fig. 7.



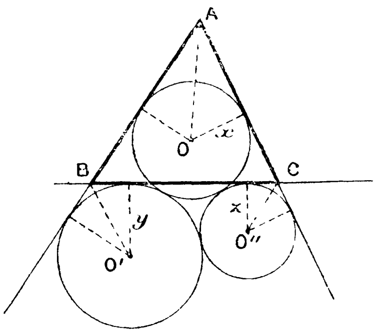
Dix-huitième, dix-neuvième et vingtième solutions. — On a les équations

$$(\mathrm{VIII})\quad \begin{cases} a = y \operatorname{tang}\dfrac{B}{2} + z \operatorname{tang}\dfrac{C}{2} + 2\sqrt{yz}, \\[1ex] b = x \cot\dfrac{A}{2} - z \operatorname{tang}\dfrac{C}{2} + 2\sqrt{xz}, \\[1ex] c = x \cot\dfrac{A}{2} - y \operatorname{tang}\dfrac{B}{2} + 2\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Les valeurs de x, y, z répondant à ce cas sont

$$(8)\quad \begin{cases} x = \dfrac{r_a\left[1 - \cot\left(45^\circ - \dfrac{B}{4}\right)\right]\left[1 - \cot\left(45^\circ - \dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1 - \operatorname{tang}\dfrac{A}{4}\right)}, \\[2ex] y = \dfrac{r_a\left(1 - \operatorname{tang}\dfrac{A}{4}\right)\left[1 - \cot\left(45^\circ - \dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1 - \cot\left(45^\circ - \dfrac{B}{4}\right)\right]}, \\[2ex] z = \dfrac{r_a\left(1 - \operatorname{tang}\dfrac{A}{4}\right)\left[1 - \cot\left(45^\circ - \dfrac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1 - \cot\left(45^\circ - \dfrac{C}{4}\right)\right]}. \end{cases}$$

Fig. 8.



Il est à remarquer que les équations des groupes (I), (II), (V), (VI) reviennent au même et que les valeurs (1), (2), (5), (6) sont racines du système (I).

De même, les équations des groupes (III), (IV), (VII), (VIII) reviennent au même, et chacun d'eux est satisfait par les valeurs (3), (4), (7) et (8).

Cas particulier où le triangle ABC *est équila-*

téral. — On trouve alors pour les rayons des cercles O, O′, O″ :

Première solution, $a = b = c$:

(1) $$x = y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Deuxième solution :

(2) $$x = y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Troisième, quatrième et cinquième solutions :

(3) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{3}}{12}(5 + 3\sqrt{3}),\\ y = z &= \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1).\end{aligned}\right.$$

Sixième, septième et huitième solutions :

(4) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{3}}{12}(3\sqrt{3} - 5),\\ y = z &= \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + 1).\end{aligned}\right.$$

Neuvième, dixième et onzième solutions :

(5) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{12}(3\sqrt{3} + 5),\\ y = z &= \frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1).\end{aligned}\right.$$

Douzième, treizième et quatorzième solutions :

(6) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{12}(3\sqrt{3} + 5),\\ y = z &= \frac{a}{4}(\sqrt{3} + 1).\end{aligned}\right.$$

Quinzième, seizième et dix-septième solutions :

$$(7) \qquad x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Dix-huitième, dix-neuvième et vingtième solutions :

$$(8) \qquad x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Les huit solutions (1), (2), (7), (8), qui correspondent aux trois rayons égaux, sont la réciproque de la question suivante :

Trouver les côtés des huit triangles équilatéraux formés par les tangentes communes extérieures à trois cercles égaux tangents entre eux.