Nouvelles annales de mathématiques

Canon

Nouvelles démonstrations du théorème de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 257-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__257_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[K2c]

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

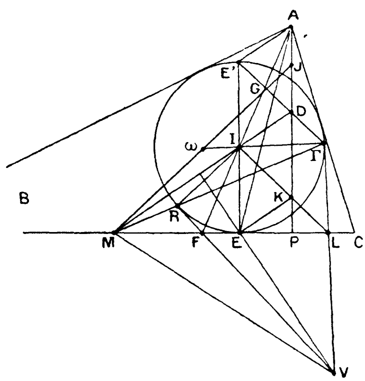
PREMIÈRE DÉMONSTRATION PAR M. CANON.

Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Pour établir le théorème de Feuerbach, soit par inversion, ou autrement, on a fait usage d'une relation bien connue. Je me suis proposé de trouver une démonstration de ce théorème indépendante de cette relation. C'est cette démonstration que je viens exposer aujourd'hui.

Prenons le triangle ABC. Appelons M le milieu de BC et E le point où ce côté est touché par le cercle inscrit. Le point I étant le centre de ce cercle, menons le rayon IR, symétrique de IE par rapport à la bissectrice AIF, et la droite MR qui coupe en Γ le cercle inscrit.

La tangente en R au cercle inscrit contient F et coupe au point V la tangente au point Γ. La droite VE, étant la polaire de M par rapport au cercle inscrit, les droites VM, VFR, VE, VLΓ forment un faisceau harmonique et, par suite, les points M, F, E, L forment une division harmonique. Les droites issues de I, qui passent par ces points, forment un faisceau harmonique



dont les rayons rencontrent la droite ΓE′, qui joint Γ au point E′ diamétralement opposé à E, aux points E′, G, D et à l'infini ([1]). Le point G est alors le milieu de E′D; il résulte de là, puisque E′A est parallèle à MID ([2]), que AD est parallèle à E′I et alors perpendiculaire à BC.

Appelons K le point où la hauteur ADP rencontre IL, la droite EK est parallèle à MID. Les triangles ho-

---

([1]) La droite E′Γ est parallèle à IL parce que cette dernière droite est la bissectrice de l'angle EIΓ.

([2]) On sait, d'après un théorème de Newton, que MID passe par le milieu du segment AE et alors E′A est parallèle à ID.

mothétiques MIE, EKP et leur centre d'homothétie donnent

$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LE}} = \frac{\mathrm{LE}}{\mathrm{LP}},$$

ou, en remplaçant LE par son égal LΓ,

$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{L\Gamma}} = \frac{\mathrm{L\Gamma}}{\mathrm{LP}}.$$

Il résulte de là qu'*il y a un cercle qui passe par* M, P *et qui est tangent en* Γ *au cercle inscrit.*

Son centre ω est à la rencontre de ΓI et de la parallèle Mω à RI, c'est-à-dire qu'en prolongeant Mω jusqu'au point J de la hauteur AP, le segment MJ est le diamètre de ce cercle. Ce diamètre, étant parallèle à RI, fait avec la bissectrice AI le même angle que AP, c'est alors le diamètre du cercle des neuf points.

On voit donc que *le cercle auquel nous sommes arrivé est le cercle des neuf points du triangle* et alors que *ce dernier cercle est tangent en* Γ *au cercle inscrit.*

Remarques. — Le point de contact Γ s'obtient à la rencontre du cercle inscrit et de la droite MR, il est aussi à la rencontre de ce cercle et de la droite qui joint le point E', au milieu G de IA. Dans ces deux cas le cercle doit être tracé.

Lorsque le cercle n'est pas tracé, voici comment on obtient Γ :

On détermine K à la rencontre de AP et de la parallèle EK à MI, le point Γ est le symétrique de E par rapport à IK.

J'ai déjà eu l'occasion de donner ces diverses constructions du point Γ.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION PAR M. G. FONTENÉ.

Étant donné un quadrangle ABCD, on sait que les cercles des neuf points des quatre triangles auxquels il donne lieu ont un point commun P. En outre, le cercle circonscrit au triangle podaire du point D relativement au triangle ABC, par exemple, passe au point P.

Cela posé, soient un triangle ABC, et deux points D et D′ inverses l'un de l'autre par rapport à ce triangle. Les deux triangles podaires ont même cercle circonscrit et celui-ci coupe le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points P et P′ qui se *séparent :* l'un est le point commun aux cercles des neuf points des triangles DBC, DCA, DAB, l'autre est le point commun aux cercles des neuf points des triangles D′BC, ... Si maintenant D est le centre d'un cercle (D) tangent aux trois côtés du triangle ABC, ce point coïncide avec son inverse, les points P et P′ se confondent, et l'on voit que le cercle (D) est tangent au cercle des neuf points du triangle.