

A. VACQUANT

**Solution de la question de mathématiques
spéciales du concours d'agrégation de 1905**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 20-31

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_20_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
DU CONCOURS D'AGREGATION DE 1905;**

PAR M. A. VACQUANT.

1° On donne les deux droites D , D' définies respectivement par les équations

$$(D) \quad y = 0, \quad z = h,$$

$$(D') \quad x = 0, \quad z = h,$$

les axes de coordonnées ox , oy , oz étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface S lieu du sommet d'un parabolôïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface.

2° Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S en fonction de l'abscisse x et de l'ordonnée z des deux points N , N' où une droite, menée par M , rencontre respectivement D et D' . Soit P le point de coordonnées x , z dans le plan xoy . Lieu du point M quand P décrit une droite quelconque du plan xoy . Étude de l'intersection de la surface S avec une quadrique quelconque qui passe par D et D' . Lieu correspondant du point P . Cas où cette intersection se décompose.

3° Démontrer que la surface S est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques Q , dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloides Q_1 . Trouver l'enveloppe des quadriques Q .

I. Les deux droites D, D' définies respectivement par les équations

$$(D) \quad y = 0, \quad z = h,$$

$$(D') \quad x = 0, \quad z = -h$$

seront rencontrées par une droite ayant pour équations

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q.$$

si l'on a

$$bh + q = 0, \quad -ah + p = 0$$

et, par suite,

$$(G) \quad x = a(z - h), \quad y = b(z - h)$$

sont les équations d'une droite G rencontrant D et D' en des points N et N' ayant respectivement pour abscisse et pour ordonnée

$$x = ah, \quad y = -bh.$$

Pour que G reste parallèle au plan

$$Ax + By + Cz = 0,$$

il faut

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Le paraboloid engendré par G a pour équation

$$\frac{Ax}{z-h} + \frac{By}{z+h} + C = 0$$

ou

$$Ax(z-h) + By(z+h) + C(z-h)(z+h) = 0$$

ou

$$(\pi) \quad Cz^2 + Axz + Byz - Ahx + Bhx - Ch^2 = 0.$$

Ce paraboloïde ayant pour plans directeurs

$$z = 0, \quad Ax + By - Cz = 0,$$

la direction de son axe a pour équations

$$\frac{x}{B} = \frac{y}{-A} = \frac{z}{0}.$$

Le point $M(x, y, z)$ sera le sommet de π si le plan tangent en M est perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire si l'on a

$$A\left(\frac{z-h}{B}\right) - \frac{B(z-h)}{-A} - Ax - By + Cz = 0.$$

Les coordonnées du sommet M de π sont donc définies par les équations

$$\begin{aligned} A(z-h) + B^2(z+h) &= 0, & Ax + By - Cz &= 0, \\ Ax(z-h) + By(z-h) - C(z-h)(z+h) &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant C entre les deux dernières équations, on obtient l'équation

$$Ax(z-h)(z-h+z) + By(z-h)(z-h+z) = 0$$

ou

$$Ax(z-h)^2 + By(z+h)^2 = 0.$$

En éliminant A et B entre cette équation et la première des trois précédentes on a l'équation ponctuelle du lieu de M :

$$y^2(z-h)^2(z-h) - x^2(z-h)^2(z+h) = 0.$$

Après suppression du facteur $(z-h)(z+h)$ qui donne l'ensemble des deux plans parallèles à xOy

menés par D et D', on obtient une surface S ayant pour équation ponctuelle

$$(S) \quad y^2(z+h)^3 + x^2(z-h)^3 = 0$$

ou

$$x^2(h-z)^3 = y^2(h+z)^3,$$

c'est-à-dire une surface réglée du cinquième ordre ayant pour génératrice la droite

$$y = \lambda x, \quad h - z = \lambda^{\frac{2}{3}}(h + z),$$

parallèle au plan xoy et s'appuyant sur l'axe des z qui est une ligne double de la surface. Tout plan passant par zz' coupe S suivant zz' et trois autres droites parallèles à xoy dont une seulement est réelle. La surface S est donc un conoïde ayant pour axe zz' , pour plan directeur xoy .

Les coordonnées homogènes u, v, w, r d'un plan tangent à S au point (x, y, z) sont

$$\begin{aligned} u &= 2x(z-h)^3, \\ v &= 2y(z+h)^3, \\ w &= 3y^2(z+h)^2 + 3x^2(z-h)^2, \\ r &= 3hy^2(z+h)^2 - 3hx^2(z-h)^2. \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u}{v} = \frac{x(z-h)^3}{y(z+h)^3} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{w}{r} = \frac{(z-h)^3(z+h)^2 - (z+h)^3(z-h)^2}{h[(z-h)^3(z+h)^2 + (z+h)^3(z-h)^2]} = \frac{z-h}{h} \frac{(z+h)}{z-h+z+h}$$

ou

$$\frac{w}{r} = -\frac{1}{z}.$$

En portant les valeurs de $\frac{y}{x}$ et de z dans (S) on

(24)

obtient l'équation tangentielle de la surface S

$$(1) \quad u^2 \left(\frac{-r}{w} + h \right)^3 + v^2 \left(\frac{r}{w} - h \right)^3$$

ou

$$(S_1) \quad u^2(hw - r)^3 - v^2(hw + r)^3 = 0.$$

II. Les équations (G) peuvent s'écrire

$$x = \frac{\alpha}{\gamma h} (z + h), \quad y = -\frac{\beta}{\gamma h} (z - h)$$

Ces équations, jointes à l'équation ponctuelle de S, savoir

$$x^2(z - h)^3 + y^2(z + h)^3 = 0,$$

donnent les coordonnées x , y , z d'un point quelconque M de la surface S en fonction de deux paramètres α et β . L'élimination de x et y donne l'équation

$$\alpha^2(z - h) + \beta^2(z + h) = 0.$$

D'où

$$\frac{z - h}{-\beta^2} = \frac{z + h}{\alpha^2} = \frac{\lambda z}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\gamma h}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Par suite les coordonnées du point M sont

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ y = \frac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ z = \frac{h(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}.$$

Supposons que le point P(α , β , o) décrive une droite Δ ayant pour équations

$$(\Delta) \quad z = 0, \quad ax + by + c = 0.$$

on aura

$$(3) \quad \alpha x + b\beta + c = 0.$$

Le lieu de M est une courbe définie paramétriquement par les équations (2) et (3), c'est-à-dire une cubique gauche Γ . On obtiendra les équations ponctuelles de cette cubique en éliminant α et β entre (2) et (3), ou encore entre les équations

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} &= 1, \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} &= \frac{z}{h}, \\ \alpha x - \beta y &= \alpha^2 - \beta^2, \\ \alpha x + b\beta + c &= 0. \end{aligned}$$

Des deux premières on tire α et β

$$\begin{aligned} \frac{2x}{\alpha} &= 1 + \frac{z}{h}, & \frac{2y}{\beta} &= 1 - \frac{z}{h}, \\ \alpha &= \frac{2hx}{h+z}, & \beta &= \frac{2hy}{h-z}. \end{aligned}$$

En portant dans les deux dernières on obtient l'équation de S, comme cela était à prévoir, et l'équation d'un parabolôïde ϖ_1 passant par D et D'; de sorte que la ligne lieu de M quand P décrit Δ est définie par les équations

$$\begin{aligned} (S) \quad & x^2(z-h)^3 + y^2(z+h)^3 = 0, \\ (\varpi_1) \quad & 2ahx(h-z) + 2bhy(h+z) + c(h-z)(h+z) = 0. \end{aligned}$$

L'intersection de la surface S et du parabolôïde ϖ_1 , qui est du dixième degré se compose de D et D', droites doubles de S, de la droite de l'infini $t=0$, $z=0$ comptée trois fois et de la cubique Γ .

L'équation (ϖ_1) étant linéaire et homogène par

rapport aux trois paramètres a, b, c , on peut dire que cette équation peut représenter un parabolôide quelconque passant par D et D' ; alors le calcul précédent montre que l'intersection de la surface S et d'un parabolôide quelconque passant par D et D' se compose des droites D, D' comptées deux fois, de la droite à l'infini du plan xoy comptée trois fois et d'une cubique gauche.

Étudions maintenant l'intersection de S avec une quadrique quelconque H passant par D et D' . L'équation de H est de la forme

$$(H) \quad Ax(z-h) + By(z+h) + C(z-h)(z+h) + Dxy = 0.$$

Pour tout point commun (x, y, z) à H et à S les paramètres α et β seront liés par une relation obtenue en remplaçant dans l'équation (H) les coordonnées x, y, z par leurs valeurs (2). En remarquant que

$$z-h = \frac{-2h\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad z+h = \frac{2h\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

cette relation est

$$-2Ah\alpha^3\beta^2 + 2Bh\beta^3\alpha^2 - 4Ch^2\alpha^2\beta^2 + D\alpha^3\beta^3 = 0.$$

Elle se décompose en deux :

$$(4) \quad \alpha^2\beta^2 = 0,$$

$$(5) \quad D\alpha\beta - 2Ah\alpha + 2Bh\beta - 4Ch^2 = 0.$$

La première donne sur S les droites D et D' comptées deux fois, car pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ on a respectivement

$$x = 0, \quad y = \beta, \quad z = -h \quad (\text{droite } D'),$$

$$y = 0, \quad x = \alpha, \quad z = h \quad (\text{droite } D).$$

Le lieu correspondant du point $P(\alpha, \beta)$ dans le plan xoy est l'axe oy ou l'axe ox .

L'équation (5), qui est une relation homographique

entre α et β , définit sur S une courbe du sixième degré C_6 . Le lieu correspondant de P dans le plan xoy , défini par l'équation (5), est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes ox , oy .

Si D n'est pas nul, c'est-à-dire si H n'est pas un parabolôide, de (5) on déduit •

$$\beta = \frac{2h(Ax + 2Ch)}{Dx + 2Bh},$$

et d'après les formules (2) on obtiendrait aisément les coordonnées d'un point de C_6 en fonction du seul paramètre α .

La courbe C_6 se décompose quand la relation (5) se décompose; alors (5) prend la forme

$$(m\alpha + n)(m'\beta + n') = 0,$$

ce qui a lieu, comme on le voit sur l'expression précédente de β , quand on a

$$\frac{A}{D} = \frac{C}{B}.$$

L'hyperbole (5) se réduit à deux droites respectivement parallèles à ox , oy et la courbe C_6 se décompose en deux cubiques planes; car, si l'on appelle λ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$A = D\lambda, \quad C = B\lambda,$$

et l'équation (H) devient

$$[y + \lambda(z - h)][Dx + B(z + h)] = 0,$$

c'est-à-dire que la quadrique H se réduit à deux plans passant respectivement par D , D' et déterminant dans S deux cubiques.

Si $D = 0$, la quadrique H est un parabolôide, et l'on

retrouve les résultats indiqués plus haut : la courbe C_6 est remplacée par une cubique gauche Γ et la droite à l'infini du plan xoy comptée trois fois; l'hyperbole (5) est remplacée par une droite quelconque du plan xoy . La cubique Γ devient plane si $A = 0$ ou $B = 0$, auquel cas le paraboloid se décompose en un plan parallèle à xoy passant par l'une des droites D, D' et un autre plan passant par l'autre droite. Le lieu de P est une droite parallèle à ox ou oy .

III. Les équations ponctuelle et tangentielle de S sont, en coordonnées homogènes,

$$(S) \quad x^2(z - ht)^2 + y^2(z + ht)^2 = 0,$$

$$(S_1) \quad u^2(hw - r)^2 - v^2(hw + r)^2 = 0.$$

Soit une quadrique Q ayant pour équation ponctuelle

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Les coordonnées homogènes du plan polaire d'un point (x, y, z, t) de S par rapport à Q sont

$$u = f'_x, \quad v = f'_y, \quad w = f'_z, \quad r = f'_t;$$

en remplaçant u, v, w, r par ces valeurs dans (S_1) , on doit obtenir l'équation ponctuelle de S . En identifiant l'équation obtenue avec l'équation (S) on voit aisément que, si la quadrique Q existe, son équation ne peut être que de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2C''z + D = 0.$$

c'est-à-dire que Q est une quadrique ayant pour plans de symétrie rectangulaires yoz et zox , pour axe de symétrie oz . D'ailleurs ce résultat est à peu près évident en remarquant que la surface S possède cette symétrie.

On a alors

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} f'_x = A x, \\ v &= \frac{1}{2} f'_y = A' y, \\ w &= \frac{1}{2} f'_z = A'' z + C'', \\ r &= \frac{1}{2} f'_t = C'' z + D. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans (S₁), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} A^2 x^2 [z(A'' h - C'') + C'' h - D]^3 \\ - A'^2 y^2 [z(A'' h + C'') + C'' h + D]^3 = 0. \end{aligned}$$

En identifiant avec (S), qu'on écrit

$$x^2(h - z)^3 - y^2(h + z)^3 = 0,$$

on a les relations

$$\begin{aligned} A^{\frac{2}{3}}(C'' - A'' h) &= \frac{A^{\frac{2}{3}}(C'' h - D)}{h} \\ &= A'^{\frac{2}{3}}(A'' h + C'') = \frac{A'^{\frac{2}{3}}(C'' h + D)}{h}, \end{aligned}$$

qui se réduisent aux deux suivantes

$$\begin{aligned} D &= A'' h^2, \\ C''(A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}}) &= A'' h(A^{\frac{2}{3}} + A'^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

Les deux coefficients A et A' sont différents de zéro; quant à A'' il peut être nul ou non.

Si A'' = 0, on a

$$D = 0,$$

et, comme C'' est différent de zéro, sans quoi la quadrique Q se réduirait à deux plans, on aura

$$A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} A^2 &= A'^2, \\ A &= \pm A'. \end{aligned}$$

Les quadriques Q ont, dans ce cas, pour équation générale,

$$A(x^2 \pm y^2) + 2C''z = 0$$

ou

$$x^2 \pm y^2 + 2\rho z = 0,$$

c'est-à-dire sont des paraboloides Q₁ de révolution ou équilatères.

Si A'' n'est pas nul, D est différent de zéro ainsi que C'', A et A'. Nous poserons

$$A^{\frac{1}{3}} = a, \quad A'^{\frac{1}{3}} = a':$$

par suite

$$A = a^3, \quad A' = a'^3, \quad C'' = A''h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}.$$

L'équation générale des quadriques Q est

$$a^3x^2 + a'^3y^2 + A''z^2 + 2A''h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}z + A''h^2 = 0.$$

Comme A'' est différent de zéro, on peut supposer A'' = 1, et l'équation précédente s'écrit

$$f(x, y, z) = a^3x^2 + a'^3y^2 + z^2 + 2h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}z + h^2 = 0.$$

On obtient l'enveloppe de ces quadriques Q en éliminant a, a' entre l'équation précédente et les suivantes

$$f'_a = 0, \quad f'_{a'} = 0$$

ou

$$3a^2x^2 + 2hz \frac{(a^2 - a'^2)2a - (a^2 + a'^2)2a}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

$$3a'^2y^2 + 2hz \frac{(a^2 - a'^2)2a' + (a^2 + a'^2)2a'}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$3ax^2 - 8hz \frac{a^2}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

$$3a'y^2 + 8hz \frac{a'^2}{(a^2 - a'^2)^2} = 0.$$

(31)

De ces deux dernières équations on déduit, en éliminant z ,

$$a^2 x^2 + a'^2 y^2 = 0,$$

et, d'après l'équation $f(x, y, z) = 0$, on aura

$$z^2 + 2h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + h^2 = 0$$

ou

$$\frac{z^2 + h^2}{2hz} = \frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2}.$$

D'où

$$\frac{(z - h)^2}{(z + h)^2} = \frac{2a^2}{2a'^2} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

On en déduit

$$\frac{a}{a'} = \pm \frac{z - h}{z + h}.$$

Remplaçant $\frac{a}{a'}$ par l'une ou l'autre de ces valeurs dans l'équation

$$a^2 x^2 + a'^2 y^2 = 0,$$

on obtient pour enveloppe des quadriques Q les deux surfaces

$$x^2(z - h)^3 \pm y^2(z + h)^3 = 0,$$

dont l'une est la surface S.