Nouvelles annales de mathématiques

J. Juhel-Rénoy

Sur les centres de gravité

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 394-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__394_1>

[R2b, R9b]

SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Nous nous appuierons sur les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le centre de gravité de la surface d'un triangle coïncide avec le centre de gravité de trois masses égales appliquées aux trois sommets du triangle.*

Théorème II. — *Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre de gravité de quatre masses égales appliquées aux quatre sommets du tétraèdre.*

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES.

I. *Trapèze.* — Si B et b désignent les bases du trapèze, son centre de gravité coïncide avec le centre de gravité des masses $B+b$, b, $B+b$, B, respectivement appliquées aux sommets du trapèze. Ces masses se composent en trois, $2b$, $2B$ et $B+b$, respectivement appliquées aux milieux des deux bases et au point de concours des diagonales. Donc le centre de gravité du trapèze est sur la droite qui joint les milieux des deux bases.

D'ailleurs, les deux masses b et $b+B$, appliquées aux sommets de la base supérieure, ont pour résultante $2b+B$; les deux masses B et $b+B$, appliquées aux sommets de la grande base, ont pour résultante $2B+b$; le centre de gravité du trapèze partage donc la droite qui joint les milieux des deux bases dans le rapport $\frac{2B+b}{2b+B}$.

On verrait, de même, en considérant deux à deux les triangles adjacents à chaque diagonale, que le centre de gravité coïncide avec le centre de gravité de deux masses $B+2b$ appliquées aux sommets de la petite base et de deux masses $b+2B$ appliquées aux sommets de la grande base et que, par suite, le centre de gravité du trapèze coïncide avec le centre de gravité de trois masses b, B et 4σ (σ étant la longueur de la section moyenne), respectivement appliquées au centre de gravité de ces trois longueurs.

II. *Quadrilatère.* — Le centre de gravité coïncide avec le centre de gravité de quatre masses P, $P+p$, p, $P+p$, respectivement appliquées aux quatre sommets A, B, C, D, de sorte que, O désignant le point de concours des diagonales, si l'on porte sur CA une longueur $CK = OA$ et sur DB une longueur $DM = OB$, le centre de gravité du quadrilatère se confond avec le centre de gravité du triangle BKD et du triangle ACM. Par les milieux I et J de chaque diagonale, AC et DB, menons une parallèle à l'autre, ces deux droites se rencontrent en un point P; le centre de gravité est le point de rencontre des droites JK et MI et, par suite, se confond avec le centre de gravité du triangle PIJ.

Remarquons encore que le centre de gravité coïncide avec le centre de quatre forces $P+p$ parallèles, appliquées aux quatre sommets du quadrilatère et d'une force $-(P+p)$ appliquée au point O. On peut donc dire que le centre de gravité du quadrilatère se trouve sur la droite qui joint le point de rencontre des diagonales au centre des moyennes distances des quatre sommets et partage cette droite en deux segments soustractifs dans le rapport $\frac{4}{1}$.

Soient A, B, C, D les quatre sommets du quadrilatère auxquels nous venons d'appliquer respectivement les forces

$$P+p, \qquad p = P+p-P, \qquad P+p, \qquad P = P+p-p.$$

Les deux forces $P+p$, appliquées en A et B, donnent une résultante, égale à leur somme, appliquée au milieu de AB, qu'on peut remplacer par deux forces égales à $P+p$, appliquées en O, et au point M′ d'intersection des parallèles menées par A et B aux diagonales du quadrilatère; les deux forces $-P$ et $-p$, relatives aux sommets B et D, se composent en une force

— $(P + p)$ appliquée en O; le centre de gravité se confond donc avec celui du triangle CDM′ et, par suite, en désignant par M le milieu de CD, il est au tiers de MM′ à partir de M.

Ce théorème et le précédent sont de M. Caspary.

Il serait curieux de comparer, au point de vue de la simplicité, par les méthodes de M. Lemoine, les constructions précédentes et celle que l'on donne, dans les traités de Mécanique, pour la recherche du centre de gravité du quadrilatère.

III. *Pentagone.* — Soit ABCDE un pentagone dans lequel la diagonale BE détermine le triangle ABE dont le centre de gravité coïncide avec le centre de trois forces p parallèles appliquées en A, B, E et le quadrilatère BCDE dont le centre de gravité coïncide avec le centre de quatre forces P appliquées aux quatre sommets et d'une force — P appliquée au point de concours O des diagonales. On en déduit que, M désignant le milieu de CD et Q le milieu de AO, la droite MQ est parallèle à la droite joignant le centre de gravité du triangle ABE au centre de gravité du pentagone. On a ainsi cinq droites passant par le centre de gravité du pentagone.

On peut aussi procéder de la manière suivante :

Soit ABCDE un pentagone que l'on partage en trois triangles AED, ADC, ACB ayant respectivement pour masses m_1, m_2, m_3, ces masses étant proportionnelles aux aires des triangles correspondants. On a donc, aux sommets A, B, C, D, E, les masses respectives

$$m_1 + m_2 + m_3, \quad m_3, \quad m_2 + m_3, \quad m_1 + m_2, \quad m_1.$$

Les deux masses, appliquées en E et C, pourront être remplacées par une masse $m_1 + m_2 + m_3$ appliquée en un point R de CE, tel que

$$\frac{\text{RE}}{\text{CR}} = \frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire ADE}},$$

de sorte que, si par B on mène la parallèle à AC qui rencontre CD en N, si l'on joint NE qui rencontre AD en Q et si l'on prend sur NE, dans le sens NE, une longueur NI = QE, on aura

$$\frac{\text{RE}}{\text{CR}} = \frac{\text{aire ADN}}{\text{aire ADE}} = \frac{\text{NQ}}{\text{QE}} = \frac{\text{IE}}{\text{NI}}.$$

Par suite, le point R est sur la parallèle à CD menée par I.

On verrait de même que les masses, appliquées en B et D, peuvent être remplacées par une masse

$$m_1 + m_2 + m_3,$$

appliquée en un point M de BD obtenu en prenant le point d'intersection H de CD et de la parallèle menée par E à AD, en joignant HB qui rencontre AC en P, en prenant sur HB, dans le sens HB, une longueur HK = PB et en menant par K la parallèle à DC qui rencontre BD en M.

Il en résulte que le centre de gravité du pentagone coïncide avec le centre de gravité du triangle AMB.

CENTRE DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

I. *Tronc de pyramide.* — En partant d'un sommet de la base supérieure, on peut décomposer le tronc en trois pyramides ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base respectivement la grande base B, la petite base *b* et la moyenne proportionnelle entre les deux bases $\beta = \sqrt{Bb}$. En répétant cette décomposition pour chacun des trois sommets de la base supérieure et en désignant par σ l'aire de la section moyenne

$$\sigma = \frac{B + b + 2\beta}{4},$$

on est conduit à placer à chaque sommet de la base supérieure une masse $2\sigma + b$ et, à chaque sommet de la base inférieure, une masse $2\sigma + B$.

Il en résulte que le centre de gravité du tronc de pyramide se trouve sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases et s'obtient en prenant le centre de gravité de trois masses, égales respectivement aux aires des deux bases et à quatre fois l'aire de la section moyenne et appliquées aux centres de gravité de ces aires.

On peut trouver, de la manière suivante, le rapport des distances du centre de gravité aux deux bases.

En décomposant le tronc de pyramide en trois pyramides, ayant respectivement pour base B, b et $\beta = \sqrt{Bb}$, on est conduit à placer, aux trois sommets de la base supérieure, des masses

$$b, \quad b + \beta, \quad b + \beta + B$$

et, aux trois sommets de la base inférieure, des masses

$$b + \beta + B, \quad B + \beta, \quad B.$$

Le rapport des distances du centre de gravité à la petite base et à la grande base est donc égal à

$$\frac{3B + b + 2\sqrt{Bb}}{B + 3b + 2\sqrt{Bb}}.$$

Signalons enfin la construction suivante :

Soient A, B, C les sommets de la base supérieure auxquels sont placées les masses

$$b,\quad b+\beta,\quad b+\beta+B$$

et, dans le même ordre, D, E, F les sommets de la base inférieure auxquels sont appliquées les masses

$$B+b+\beta,\quad B+\beta,\quad B.$$

Si sur EA, dans le sens EA, on porte une longueur $EM = IA$, I étant le point d'intersection des diagonales du trapèze ABED, le centre de gravité du tronc est sur la droite joignant les centres de gravité des deux pyramides MBCD et CDEF.

II. *Tronc de prisme triangulaire.* — En désignant par a, b, c les longueurs des trois arêtes, on place, aux extrémités de chacune de ces arêtes et dans chaque base respectivement, les masses

$$\begin{array}{ccc} a+b+c, & b+c, & c, \\ c, & a+b, & a+b+c. \end{array}$$

En répétant la décomposition du tronc de prisme en trois pyramides pour deux sommets différents de la base supérieure, on est conduit à placer, aux extrémités de chaque arête a, b, c et dans chaque base respectivement, les masses

$$\begin{array}{ccc} a+b+c+a, & b+c+b+a, & c+c+b+a, \\ a+c+b+a, & a+b+c+b, & a+b+c+c, \end{array}$$

qui se composent deux à deux au milieu des arêtes.

On voit donc que le centre de gravité du tronc de prisme triangulaire se confond avec le centre de gravité de quatre masses égales aux longueurs des arêtes et au triple de leur somme, appliquées respectivement au milieu de chaque arête et au centre de gravité de leur triangle.

Il en résulte que, si G est le centre de gravité d'un triangle de base et si M est le centre de trois forces parallèles égales aux arêtes et appliquées respectivement aux trois sommets de la base, la parallèle menée par le centre de gravité du tronc de prisme aux arêtes perce le plan de base en un point P, situé au quart de GM à partir de G; le centre de gravité du tronc de prisme se trouve au milieu de la droite qui joint les points P et P' relatifs aux deux bases du tronc.

III. *Tronc de parallélépipède.* — En menant un plan diagonal, on détermine deux troncs de prisme triangulaires dont les bases sont égales. Les volumes des pyramides, dans lesquelles on les décompose, sont donc proportionnels aux longueurs des arêtes a, b, c, d.

On aura donc, aux sommets de la section moyenne, par une première décomposition, les masses

$$\begin{gathered} a+b+c+a+a+d+c+a, \\ a+b+c+b, \\ a+b+c+c+a+d+c+c, \\ a+d+c+d \end{gathered}$$

et, par une seconde décomposition, les masses

$$\begin{gathered} a+b+d+a, \\ a+b+d+b+b+c+d+b, \\ b+c+d+c, \\ a+b+d+d+b+c+d+d. \end{gathered}$$

En additionnant les masses correspondantes, on trouve, pour chaque sommet de la section moyenne,

$$\begin{gathered} 4a+2(a+b+c+d), \\ 4b+2(a+b+c+d), \\ 4c+2(a+b+c+d), \\ 4d+2(a+b+c+d). \end{gathered}$$

Le centre de gravité du tronc se confond donc avec le centre de gravité de cinq masses, proportionnelles aux longueurs des arêtes et au double de leur somme, placées respectivement au milieu de chaque arête et au centre du parallélogramme formé par ces milieux.

Il en résulte que, si G est le centre d'un parallélogramme de base ABCD et si M est le centre de quatre forces parallèles, égales aux arêtes, appliquées respectivement aux quatre sommets A, B, C, D, la parallèle, menée par le centre de gravité du tronc aux arêtes, perce le plan ABCD en un point P, au tiers de GM à partir de G.

En d'autres termes, le centre de gravité du tronc se trouve au milieu de la droite qui joint les deux points P, P′ qui correspondent aux deux bases.

IV. *Polyèdre.* — Soit un polyèdre, ayant pour bases deux triangles situés dans des plans parallèles et dont les faces sont des trapèzes. En désignant par B, b, σ respectivement l'aire des deux bases et de la section moyenne, et par H la hauteur, son volume est exprimé par la formule

$$V = \frac{H}{6}(B + b + 4\sigma)$$

qu'on peut écrire

$$\frac{H}{3}B + \frac{H}{3}b + \frac{H}{3}\left(2\sigma - \frac{B + b}{2}\right)$$

ou, en posant $2\sigma - \dfrac{B + b}{2} = \beta$,

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \beta).$$

Le volume est donc équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur la hauteur du solide et pour bases respectives B, b, β.

On aura donc, comme pour le tronc de pyramide, aux sommets de la base supérieure, trois masses

$$3b + B + 2\beta = 4\sigma + 2b$$

et, aux sommets de la base inférieure, trois masses

$$3B + b + 2\beta = 4\sigma + 2B,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité d'un tel polyèdre est le centre de gravité de trois masses B, b et 4σ appliquées respectivement aux centres de gravité des trois triangles correspondants.

C'est, d'ailleurs, un théorème bien connu, que M. Darboux a étendu au centre de gravité du segment à deux bases, compris entre deux sections parallèles d'une surface réglée.

CENTRES DE PERCUSSION.

I. *Triangle.* — Soient ABC, DEF les deux bases d'un tronc de prisme dont les plans se coupent suivant la droite yy'; si l'on se reporte à la recherche du centre de gravité du tronc de prisme, le point que nous avons appelé P est le centre de percussion du triangle ABC par rapport à la droite d'intersection yy' des deux bases du tronc.

On sait que les moments et le produit d'inertie d'un triangle, par rapport à deux droites orthogonales de son plan, s'obtiennent en considérant la masse du triangle, comme condensée en trois masses égales, appliquées respectivement aux milieux des côtés du triangle.

Le produit d'inertie par rapport à deux droites orthogonales xx', yy' du plan du triangle, en remarquant que les x des points A, B, C sont proportionnels à a, b, c, devant être nul, on aura

$$\sum (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = 0$$

ou

$$3(a + b + c)Y + ay_1 + by_2 + cy_3 = 0.$$

Donc la droite Ox doit passer par le point P pour que le produit d'inertie soit nul. Le point O, projection du point P sur yy', est donc le point pour lequel cette droite est axe principal d'inertie par rapport au triangle. On démontrera donc que P est le centre de percussion si le moment d'inertie du triangle est égal à

$$S \times GQ \times PO,$$

G étant le centre de gravité du triangle et Q sa projection sur yy'.

Or

$$GQ = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$PO = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + (a + b + c)(x_1 + x_2 + x_3)}{4(a + b + c)}.$$

Il faut donc prouver que

$$\frac{1}{12}\frac{x_1 + x_2 + x_3}{a + b + c}\left[ax_1 + bx_2 + cx_3 + (a + b + c)(x_1 + x_2 + x_3)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\sum (x_1 + x_2)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sum x_1^2 + \sum x_1 x_2\right)$$

ou, en remplaçant x_1, x_2, x_3 par les quantités proportionnelles a, b, c,

$$(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c)^2 \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc),$$

ce qui est une identité.

Donc le centre de gravité du tronc de prisme se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de percussion des deux bases par rapport à la droite d'intersection de leurs plans.

THÉORÈME. — *Soient* ABC *la base d'un prisme et* yy' *une droite de son plan. Si l'on mène par cette droite un plan qui coupe le prisme suivant le triangle* DEF, G *désignant le centre de gravité du triangle* ABC *et* M *le centre de trois forces parallèles* AD, BE, CF *appliquées en* A, B, C *et égales aux arêtes du tronc :*

1° *Le point* P *situé au quart de* GM *à partir de* G *est le centre de percussion du triangle par rapport à la droite;*

2° *Le point* O, *projection de* P *sur la droite, est le point pour lequel la droite est axe principal d'inertie;*

3° *Le carré du rayon de giration est égal à la puissance du point* O *par rapport au cercle qui a* GP *pour diamètre;*

4° *Le centre de gravité du tronc de prisme se trouve au milieu de la parallèle menée par* P *aux arêtes et limitée aux deux bases du tronc.*

En particulier, le centre de percussion d'un triangle par rapport à une parallèle à un côté, menée par un sommet, est sur la médiane issue de ce sommet, au quart de cette médiane à partir du côté opposé, et le centre de percussion d'un triangle *par rapport à un côté est au milieu de la médiane issue du sommet opposé.*

II. Un calcul tout semblable fournit un théorème analogue dans le cas du tronc de parallélépipède. En particulier, le centre de percussion d'un parallélogramme par rapport à un des côtés est au tiers de la ligne médiane à partir du côté opposé, et le centre de percussion par rapport à une parallèle à une diagonale passant par un sommet est, à partir du sommet, aux $\frac{7}{12}$ de la diagonale issue de ce sommet.