G. Fontené

Sur le cercle pédal

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 508-509

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__508_0>

[K2e]

SUR LE CERCLE PÉDAL;

PAR M. G. FONTENÉ.

Bobillier a donné en 1829, dans les *Annales de Gergonne,* le théorème suivant :

Pour une hyperbole équilatère, le cercle pédal d'un point D *de la courbe, relativement à un triangle inscrit* ABC, *passe au centre de la courbe.*

Ce théorème est obtenu en transformant par polaires réciproques, relativement à un cercle de centre D, le fait que tout triangle circonscrit à une parabole a son cercle circonscrit passant au foyer de la courbe; le point D est pris sur la directrice. On déduit de là la propriété suivante, sur laquelle j'ai fondé une démonstration du théorème de Feuerbach (*Nouvelles Annales,* 1905, p. 260 et 504) :

Étant donné un quadrangle ABCD, *les cercles des neuf points des quatre triangles auxquels il donne lieu ont un point commun* K ; *en outre, le cercle pédal de l'un quelconque des quatre points relativement au triangle formé par les trois autres passe au point* K.

Voici une démonstration élémentaire de cette dernière propriété :

Soit un triangle ABC, dont les côtés ont leurs milieux en M, N, P. Le point S étant quelconque, et les milieux des segments SA, SB, SC étant M', N', P', les cercles des neuf points des deux triangles SAB et SAC ont en commun le point M′ et un autre point que nous appellerons K; on a alors

$$\widehat{M'KP} = \widehat{M'N'P} = \widehat{SAB},$$

$$\widehat{M'KN} = 2^d - \widehat{M'P'N} = 2^d - \widehat{SAC},$$

et, par soustraction,

$$(1) \qquad \widehat{PKN} = 2^d - A = 2^d - \widehat{PMN}:$$

le point K appartient donc au cercle des neuf points du triangle ABC, et une démonstration analogue s'applique au triangle SBC. Ce premier point étant acquis, soit DEF le triangle pédal du point S: le cercle DEF passera au point K si les angles FKE et FDE sont supplémentaires. Or, le point K étant sur le cercle des neuf points du triangle SAB, dont SF est une hauteur, on a

$$\widehat{PKF} = \widehat{SBA} - \widehat{SAB} = \widehat{SDF} - \widehat{SAB};$$

on a de même

$$\widehat{NKE} = \widehat{SCA} - \widehat{SAC} = \widehat{SDE} - \widehat{SAC};$$

l'addition donne

$$\widehat{PKF} + \widehat{NKE} = \widehat{FDE} - A;$$

on a donc, en tenant compte de (1),

$$\widehat{FKE} = (2^d - A) - (\widehat{FDE} - A) = 2^d - \widehat{FDE}.$$

(J'ai employé les notations de la page 55 du Volume des *Nouvelles Annales* pour 1906.)